Autoreferat

Piotr Borodulin-Nadzieja

Podstawowe informacje.

Imię i nazwisko: **Piotr Borodulin-Nadzieja**
Adres: Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.
Email: pborod@math.uni.wroc.pl
WWW: http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod

Stopnie naukowe.

- 2002 r. - dyplom magistra matematyki teoretycznej.
  Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski.
  Rozprawa: *O ideałach Mokobodzkiego*.
  Promotor: Jacek Cichoń.
- 2007 r. - dyplom doktora matematyki.
  Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski.
  Rozprawa: *Miary na przestrzeniach polskich i na algebrach Boole'a*.
  Promotor: Grzegorz Plebanek.

Przebieg kariery naukowej.

- 2007 – 2017 - adiunkt; Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski,
- listopad 2015 - zaproszona pozycja wizytująca w Newton Institute, Cambridge, Wielka Brytania,
- październik 2012 - zaproszona pozycja wizytująca w Fields Institute, Toronto, Kanada,
- wrzesień 2009 - grudzień 2009 - zaproszona pozycja wizytująca w University of East Anglia, Norwich, Wielka Brytania,
- 2003 – 2007 - doktorant; Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski.

1 Wskazanie osiągnięcia habilitacyjnego.

Cykl 4 prac zatytułowany

Miary na małych przestrzeniach zwartych.

1.1 Lista prac zawierających wskazane osiągnięcia.

[1] Piotr Borodulin-Nadzieja. Measures and fibers. *Topology Appl.*, 210:201–215, 2016.

[2] Piotr Borodulin-Nadzieja and Mirna Džamonja. On the isomorphism problem for measures on Boolean algebras. *J. Math. Anal. Appl.*, 405(1):37–51, 2013.

[3] Piotr Borodulin-Nadzieja and Tanmay Inamdar. Measures and slaloms. *Fund. Math.*, DOI 10.4064/fm318-10-2016, 2017.

[4] Piotr Borodulin-Nadzieja and Grzegorz Plebanek. Measures on Suslinean spaces. *Fund. Math.*, 235(3):287–302, 2016.

Mój udział w pracach współautorskich jest oceniony na załączonych oświadczeniach.

1.2 Omówienie osiągniętych wyników na podstawie wyżej wymienionych prac.

1.2.1 Motywacje i rys historyczny.

W 1942 roku Dorothy Maharam podała pełną i bardzo prostą klasyfikację miar ściśle dodatnich[1] na zupełnych algebrach Boole'a. Zasadniczym elementem tej klasyfikacji jest twierdzenie, że jeśli μ jest miarą bezatomową i jednorodną na algebrze Boole'a $\mathfrak{A}$, to $\mathfrak{A}$ jest izomorficzna z algebrą zbiorów mierzalnych standardowej miary λ na 2^κ dla pewnego κ i to w taki sposób, że izomorfizm ten przeprowadza miarę μ na λ.

Jeśli interesują nas nie tyle algebry zbiorów mierzalnych, co miary na przestrzeniach topologicznych i wzajemne interakcje struktury mierzalnej i topologicznej, rozpatrywanie izomorfizmu algebr miarowych okazuje się jednak niewystarczające. Zauważmy, że miara Lebesgue'a na odcinku $[0,1]$ i standardowa miara na przestrzeni Stone'a algebry $\mathrm{Bor}([0,1])/_{\lambda=0}$ mają izomorficzne algebry zbiorów mierzalnych i w pewnym sensie obydwie są po prostu wcieleniem miary Lebesgue'a. Wcielenia te jednak zasadniczo się od siebie różnią - np. pierwsza z tych miar jest jednostajnie regularna, podczas gdy druga jest daleka od tej własności.

Dlatego naturalne wydaje się pytanie o strukturę miar *skończenie addytywnych* na (niekoniecznie zupełnych) algebrach Boole'a. Jakkolwiek miara skończenie addytywna może wydawać się na pierwszy rzut oka egzotycznym obiektem, dzięki dualizmowi Stone'a badanie miar skończenie addytywnych na algebrach Boole'a jest w istocie badaniem (σ-addytywnych) miar Radona na przestrzeniach zwartych zerowymiarowych.

W 1982 w komentarzach do wydania Księgi Szkockiej z 1982 roku ([Mau82]) Maharam postawiła problem klasyfikacji miar skończenie addytywnych na algebrach Boole'a. Jest mało prawdopodobne, że da się sformułować twierdzenie klasyfikujące miary skończenie addytywne, które będzie choć w części tak eleganckie, jak twierdzenie Maharam. Ich struktura jest po prostu zbyt złożona. W rozdziale 1.2.3 podamy matematyczne przesłanki wydające się potwierdzać tę intuicję. Mimo, że pełna odpowiedź na

[1] Podstawowe definicje znajdują się w rozdziale 1.2.2

pytanie Maharam jest prawdopodobnie nieosiągalna, stanowi ono jedno z głównych motywacji naszych badań.

Struktura miar skończenie addytywnych na algebrach Boole'a była wnikliwie badana od lat czterdziestych ubiegłego wieku, by wymienić tu problemy związane z charakteryzacją zupełnych algebr Boole'a, na których istnieją miary ściśle dodatnie i σ-addytywne (w szczególności problem Maharam, rozważany m. in. przez von Neumanna, Tarskiego, Jecha, Talagranda czy Todorčevića), problem charakteryzacji algebr, na których istnieje ściśle dodatnia miara ośrodkowa (badany m. in. przez Talagranda, Fremlina, Plebanka i Džamonję) czy problem charakteryzacji algebr Boole'a, na których wszystkie miary są ośrodkowe (rozważany m. in. przez Haydona, Kunena i Fremlina). Motywacje, którymi kierowano się w tych badaniach, były szerokie i czasem pozornie dalekie od oryginalnych problemów. Na przykład wiele zagadnień teorii przestrzeni Banacha ma związek z miarami na algebrach Boole'a i na przestrzeniach zwartych. Przykład takiego nieoczywistego na pozór związku podamy w rozdziale 1.2.6.

W naszych badaniach zajęliśmy się powiązaniami między własnościami miarowymi, a własnościami topologicznymi i kombinatorycznymi, przy czym koncentrujemy się na przestrzeniach, które są w jakimś sensie „małe" - w nadziei, że zrozumienie pewnych zjawisk zachodzących dla mniej skomplikowanych struktur, jest odpowiednim krokiem ku ogólnym twierdzeniom. Słowo „małe" można tu interpretować na różne sposoby, np. jako własność małej bazy, małej π-bazy czy małego π-charakteru. Jednak pojęciem, które zdaje się najlepiej ujmować istotę tego słowa w interesującym nas kontekście, jest własność, którą na potrzeby tego referatu nazwiemy własnością $(\flat)$.

Definicja 1. *Przestrzeń zwarta K spełnia warunek $(\flat)$, jeśli nie istnieje ciągła surjekcja z K na kostkę Tichonowa $[0,1]^{\omega_1}$.*

Warunek będący w pewnym sensie miarowym odpowiednikiem $(\flat)$ nazwiemy własnością $(\sharp)$:

Definicja 2. *Przestrzeń zwarta K ma własność $(\sharp)$, jeśli każda miara na K jest ośrodkowa.*

Własność $(\sharp)$ pociąga $(\flat)$. Odpowiadając na otwarty przez wiele lat problem Haydona, Fremlin pokazał, że niesprzecznie zachodzi implikacja przeciwna ([Fre97]).

Szczególnie ważne są dla nas własności związane z warunkami łańcuchowymi (ang. *chain conditions*). W pracy [Kel59] Kelley podał kombinatoryczną charakteryzację istnienia miary ściśle dodatniej, mającą postać warunku łańcuchowego. Istnienie miary ściśle dodatniej pociąga własność ccc i jest implikowane przez ośrodkowość przestrzeni Stone'a. Również inne własności miarowe takie, jak „istnieje ściśle dodatnia miara jednostajnie regularna" czy „istnieje ściśle dodatnia miara przeliczalnie zdeterminowana" można interpretować jako warunki łańcuchowe.

Ta uwaga prowadzi w naturalny sposób do rozważania przestrzeni zwartych *nieośrodkowych*, na których można zdefiniować miarę ściśle dodatnią. Przykładami takich przestrzeni są przestrzeń Stone'a algebry miary Lebesgue'a czy 2^κ dla $\kappa > \mathfrak{c}$. Jeśli zażądamy, żeby nasza przestrzeń była mała, to istnienie odpowiedniego przykładu staje się nieoczywiste, a sam problem bliski sławnemu problemowi Suslina. Przypomnijmy, że jedno ze sformułowań Hipotezy Suslina brzmi „Każda przestrzeń zwarta ccc i liniowo uporządkowana jest ośrodkowa". W 1971 roku Solovay i Tennenbaum udowodnili, że jest ona niesprzeczna z ZFC formułując aksjomat, dzisiaj nazywany aksjomatem Martina, który ją pociąga (przy negacji Hipotezy Continuum). Aksjomat Martina dla κ zbiorów gęstych oznaczać będziemy przez MA_κ. Szybko okazało się, że warunek liniowego uporządkowania w pewnym sensie nie jest kluczowy i może zostać zmieniony na pewne bardziej ogólne własności:

Twierdzenie 3. (Juhasz, [Juh71, Twierdzenie 1.3]) *Załóżmy MA_{ω_1}. Wówczas każda przestrzeń zwarta ccc o π-ciężarze mniejszym od ω_2 jest ośrodkowa.*

W latach dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku trwały intensywne badania nad następującą hipotezą:

(Hipoteza (T)) *Każda przestrzeń zwarta ccc spełniająca własność $(\flat)$ jest ośrodkowa.*

Była ona nazywana „ostateczną wersją Hipotezy Suslina“ lub „aksjomatem Todorčevića” do czasu, aż sam Todorčević udowodnił jej sprzeczność z ZFC:

Twierdzenie 4. (Todorčević, [Tod00]) *Istnieje przestrzeń zwarta ccc i nieośrodkowa, spełniająca własność ($\flat$) i mająca przeliczalny π-charakter.*

Wcześniej Bell ([Bel96]) i Moore ([Moo99]) podali przykłady takich przestrzeni, istniejące przy założeniu MA_{ω_1}.

Centralnym tematem naszych badań jest problem niesprzeczności stwierdzenia, które można nazwać „miarową wersją Hipotezy Suslina”:

(Hipoteza (S)) *Każda przestrzeń zwarta z miarą ściśle dodatnią, która spełnia własność ($\flat$), jest ośrodkowa.*

Przykład Todorčevića spełnia silniejsze warunki łańcuchowe niż ccc - ma własność Knastera i jest σ-n-połączony dla każdego n. Własność „istnieje miara ściśle dodatnia” jest więc najsłabszym warunkiem łańcuchowym, dla którego warto rozważać odpowiednie osłabienie Hipotezy (T). Hipoteza (S) wydaje się więc ważna nie tylko dla analizy miar na przestrzeniach zwartych, ale także dla badań nad warunkami łańcuchowymi. O ile nam wiadomo, do tej pory w literaturze nie została ona nigdy sformułowana, choć była rozważana przez Todorčevića. Pewnej informacji na temat jej prawdziwości dostarcza jedynie następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5. (Kunen-van Mill, [KvM95]) *Następujące warunki są równoważne:*

a) $\neg\mathsf{MA}_{\omega_1}(ma)$,

b) istnieje kompakt Corsona ze ściśle dodatnią miarą nieośrodkową.

$\mathsf{MA}_\kappa(ma)$ oznacza tu aksjomat Martina dla algebr miarowych dla κ zbiorów gęstych. Ponieważ kompakt Corsona z miarą nieośrodkową nie może być ośrodkowy, przykład jak w b) pociąga negację Hipotezy (S).

Problem, czy Hipoteza (S) jest niesprzeczna z ZFC jest nadal otwarty. Udało nam się zarówno udowodnić, że pewne warianty Hipotezy (S) są niesprzeczne, jak i podać parę nowych przykładów przestrzeni typu suslinowskiego. Nasze rezultaty wskazują, że jeśli Hipoteza (S) jest spełniona w jakimś modelu teorii mnogości, to jest nim prawdopodobnie model Solovaya.

Rozdział 1.2.3 poświęcony jest ogólnym rezultatom dotyczącym problem klasyfikacji miar na algebrach Boole'a (zawartym w pracy [2]). W rozdziale 1.2.4 omawiamy twierdzenia o niesprzeczności pewnych wariantów Hipotezy (S) (z pracy [4]), natomiast w rozdziale 1.2.5 prezentujemy nowe przykłady przestrzeni suslinowskich (z prac [4] i [3]). Techniki rozwinięte w trakcie badań nad Hipotezą (S) okazały się przydatne również w zagadnieniach związanych z problemem charakteryzacji przestrzeni zwartych bez miary nieośrodkowej (rozdział 1.2.8), problemem zanurzania algebry miarowej w $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ (rozdział 1.2.6) czy problemem Maharam (rozdział 1.2.7).

Dodajmy, że rozważanie problemu niesprzeczności Hipotezy (S) doprowadziło także pośrednio do rozwiązania pewnych problemów dotyczących luk w $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ (wyniki te nie wchodzą w skład osiągnięcia habilitacyjnego; omawiamy je w rozdziale 1.3.2). Zainspirowało ono także badanie współczynników związanych ze slalomami i analitycznymi P-ideałami na ω (prowadzone obecnie przeze mnie i Barnabása Farkasa).

1.2.2 Podstawowe definicje.

W dalszej części referatu przez miary na algebrach Boole'a będziemy rozumieć miary skończenie addytywne, a na przestrzeniach zwartych σ-addytywne miary Radona. Wszystkie rozważane przez nas miary są probabilistyczne.

Algebry Boole'a będziemy traktować jako algebry podzbiorów, stosując oznaczenia „$\cap$", „$\cup$", itd. Przypomnijmy, że algebra Boole'a jest σ-scentrowana wtedy i tylko wtedy, gdy jej przestrzeń Stone'a jest ośrodkowa. Podobnie, algebra Boole'a zawiera tylko przeliczalne rodziny niezależne (w sensie mnogościowym) wtedy i tylko wtedy, gdy jej przestrzeń Stone'a ma własność ($\flat$).

Miara μ na przestrzeni K jest *ściśle dodatnia*, jeśli $\mu(U) > 0$ dla każdego niepustego zbioru otwartego. Powiemy, że przestrzeń zwarta jest *przestrzenią z miarą ściśle dodatnią*, jeśli można na niej zdefiniować miarę ściśle dodatnią. Analogicznie definiujemy algebrę Boole'a z miarą ściśle dodatnią (czyli taką, która niezerowym elementom algebry Boole'a przypisuje dodatnie wartości).

Powiemy, że miara na przestrzeni zwartej jest bezatomowa, jeśli znika na punktach, natomiast miara na algebrze Boole'a jest bezatomowa, jeśli jej rozszerzenie znika na punktach jej przestrzeni Stone'a.

Definicja 6. *Niech μ będzie miarą na algebrze Boole'a $\mathfrak{B}$. Miarą μ nazwiemy* ośrodkową, *jeśli istnieje przeliczalna rodzina $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{B}$ taka, że*

$$\inf\{\mu(A \triangle B) \colon A \in \mathcal{A}\} = 0$$

dla każdego $B \in \mathfrak{B}$. Miara μ jest jednostajnie regularna względem rodziny $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{B}$, *jeśli*

$$\mu(B) = \sup\{\mu(A) \colon A \subseteq B, A \in \mathcal{A}\}.$$

Jeśli miara jest jednostajnie regularna względem jakiejś przeliczalnej rodziny, to powiemy, że jest po prostu jednostajnie regularna.

Miara μ na przestrzeni topologicznej jest *ośrodkowa*, jeśli μ na algebrze Boole'a zbiorów mierzalnych jest ośrodkowa. Miary ośrodkowe nazywane są też miarami *typu Maharam* przeliczalnego. Pojęcie to uogólnia się w oczywisty sposób na inne liczby kardynalne. Własność jednostajnej regularności również można w naturalny sposób „przetłumaczyć" na język miar na przestrzeniach zwartych, choć tłumaczenie to nie będzie nam tu potrzebne.

Definicja 7. *Miarę μ na przestrzeni zwartej K nazwiemy* przeliczalnie zdeterminowaną, *jeśli istnieje taka przeliczalna rodzina zbiorów domkniętych $\mathcal{F}$, że*

$$\mu(U) = \sup\{\mu(F) \colon F \subseteq U, F \in \mathcal{F}\}$$

dla każdego otwartego $U \subseteq K$.

Jeśli miara jest jednostajnie regularna, to jest przeliczalnie zdeterminowana, a jeśli jest przeliczalnie zdeterminowana, to jest ośrodkowa. Na każdej przestrzeni ośrodkowej można określić przeliczalnie zdeterminowaną miarę ściśle dodatnią.

Jeśli $\mathcal{I}$ jest ideałem na zbiorze K, to

$$\operatorname{add}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{A}| \colon \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I},\ \bigcup \mathcal{A} \notin \mathcal{I}\},$$
$$\operatorname{non}(\mathcal{I}) = \min\{|X| \colon X \subseteq K,\ X \notin \mathcal{I}\},$$
$$\operatorname{cov}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{A}| \colon \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I},\ \bigcup \mathcal{A} = K\}.$$

Dla liczby kardynalnej $\kappa \geq \omega$ niech λ_κ oznacza standardową miarę (Lebesgue'a) na 2^κ natomiast $\mathcal{N}_\kappa$ niech będzie ideałem zbiorów miary λ_κ zero. Przez $\mathcal{M}$ będziemy oznaczać ideał zbiorów pierwszej kategorii Baire'a. Algebry Boole'a postaci $\mathrm{Bor}(2^\kappa)/\mathcal{N}_\kappa$ będziemy nazywać *algebrami miarowymi*, natomiast algebrę Boole'a $\mathrm{Bor}(2^\omega)/\mathcal{N}$ będziemy nazywać *algebrą miary*.

Definicje innych współczynników kardynalnych użytych w tym referacie znajdują się w [Bla10], natomiast definicje współczynników związanych z topologią (np. π-charakteru) w [Juh71].

Przyda nam się także poniższa charakteryzacja aksjomatu Martina dla algebr miarowych.

Twierdzenie 8. (patrz np. [KvM95])

$$\mathsf{MA}_{\omega_1}(\mathrm{ma}) \iff \operatorname{cov}(\mathcal{N}_{\omega_1}) > \omega_1.$$

1.2.3 Problem klasyfikacji miar na algebrach Boole'a.

W pracy [2] zajmowaliśmy się problemem klasyfikacji miar (skończenie addytywnych) na algebrach Boole'a, przy czym klasyfikację tę rozważamy względem następującego pojęcia izomorfizmu miar. Niech miara μ będzie określona na algebrze Boole'a $\mathfrak{A}$, a ν na algebrze $\mathfrak{B}$. Powiemy, że miary te są *izomorficzne*, jeżeli istnieje taki izomorfizm boole'owski $\varphi\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, że $\mu(A) = \nu(\varphi(A))$ dla każdego $A \in \mathfrak{A}$. Twierdzenie Maharam klasyfikuje miary σ-addytywne na zupełnych algebrach Boole'a względem tej właśnie relacji.

Badaliśmy stopień złożoności izomorfizmu miar jako relacji równoważności. Załóżmy, że R jest relacją równoważności na przestrzeni polskiej X. Powiemy, że jest ona borelowska, jeśli R jest borelowskim podzbiorem X^2. Relacja R określona na X *redukuje się* do relacji T, określonej na Y, jeśli istnieje taka funkcja borelowska $f\colon X \to Y$, że $x\mathsf{R}y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x)\mathsf{T}f(y)$. Relacja R jest *borelowsko zupełna*, jeśli każda borelowska relacja równoważności redukuje się do R. Mówiąc bardzo skrótowo im relacja znajduje się wyżej w hierarchii zadanej przez redukowalność, tym mniejsze szanse na prosto formułowalne twierdzenie klasyfikacyjne ze względu na tę relację.

Nasze badania ograniczyliśmy do szczególnego przypadku miar określonych na algebrze Cantora (tj. algebrze wolnej o przeliczalnie wielu generatorach). Wprowadzenie jakiegoś ograniczenia jest konieczne, aby móc użyć opisanego wyżej aparatu (zbiór miar musi tworzyć przestrzeń polską). Nawet jednak w tym przypadku relacja izomorfizmu miar nie wydaje się być szczególnie prosta.

Miary ściśle dodatnie na algebrze Cantora można zakodować jako elementy $X = (0,1)^{2^{<\omega}}$ tak, żeby każdy element X kodował pewną miarę ściśle dodatnią. Przestrzeń X ze standardową topologią jest przestrzenią polską, a izomorfizm miar wyznacza na X pewną relację równoważności R. Podobnie, miary niekoniecznie ściśle dodatnie można zakodować jako elementy pewnego podzbioru $Y \subseteq X$ typu G_δ. Standardową strategią badania stopnia złożoności relacji równoważności jest znajdowanie znanych relacji, które redukują się lub, do których można zredukować, badaną relację. W pracy [2] nie udało nam się umiejscowić w ten sposób R, rozważaliśmy jedynie pewne jej warianty.

Relację R_0 na X definiujemy przez

$$x\mathsf{R}_0 y, \text{ jeśli istnieje taki automorfizm } \varphi \text{ drzewa } 2^{<\omega}, \text{ że } \forall x \in 2^{<\omega} \quad x(s) = y(\varphi(s)).$$

Relacja R_0 jest silniejszą (tj. mniejszą w sensie mnogościowym) relacją niż R.

Twierdzenie 9. ([2, Twierdzenie 3.1]) *Relacja* R_0 *jest redukowalna do relacji izomorfizmu skończenie rozgałęzionych drzew (ang.* finitely branching trees*).*

Relacja izomorfizmu skończenie rozgałęzionych drzew jest borelowska.

Naturalną relacją związaną z miarami niekoniecznie ściśle dodatnimi jest równość ideałów zbiorów miar zero. Oznaczmy przez „$\cong$" odpowiednik tej relacji na Y. R_1 będzie relacją na Y definiowaną przez

$$x\mathsf{R}_1 y, \text{ jeśli istnieje taki } z\mathsf{R}x, \text{ że } z \cong y.$$

Twierdzenie 10. ([2, Twierdzenie 3.2]) *Relacja* R_1 *jest borelowsko zupełna.*

Powyższy wynik wskazuje (choć nie dowodzi), że relacja izomorfizmu miar niekoniecznie ściśle dodatnich na algebrze Cantora, jest borelowsko zupełna. Pomimo, że udało nam się pokazać, że pewne warianty izomorfizmu miar ściśle dodatnich na algebrze Cantora dają się zredukować do relacji borelowskich (jak w Twierdzeniu 9), najprawdopodobniej izomorfizm miar *ściśle dodatnich* jest również dość skomplikowany. Po pierwsze, rozważane przez nas warianty wydają się znacznie prostsze niż sam izomorfizm. Po drugie, relacje, do których się redukują, są dość wysoko w hierarchii relacji równoważności zadanej przez redukowalność. O ile nam wiadomo, problem złożoności relacji izomorfizmu miar na algebrze Cantora, choć wzbudził pewne zainteresowanie wśród specjalistów z deskryptywnej teorii mnogości, nadal jest otwarty.

Część pracy [2] jest też przyczynkiem do częściowej klasyfikacji miar na algebrach Boole'a. Sugerujemy tam, że tak, jak niezmiennikiem klasyfikacji Maharam jest typ Maharam, tak w klasyfikacji miar skończenie addytywnych podobną rolę może pełnić *typ jednostajnej regularności*, czyli najmniejsza moc takiego podzbioru algebry z miarą, względem którego miara ta jest jednostajnie regularna. Doprowadziło nas to do problemu charakteryzacji algebr Boole'a ze ściśle dodatnią miarą jednostajnie regularną i, w następstwie, do następującego twierdzenia.

Twierdzenie 11. ([2, Twierdzenie 4.1]) *Załóżmy, że μ jest miarą bezatomową i ściśle dodatnią na algebrze Boole'a $\mathfrak{A}$. Wtedy μ jest izomorficzna z miarą Lebesgue'a na pewnej podalgebrze algebry Jordana. W szczególności algebra Boole'a ma ściśle dodatnią bezatomową miarę jednostajnie regularną wtedy i tylko wtedy, gdy jest boole'wsko izomorficzna z podalgebrą algebry Jordana zawierającą gęstą podalgebrę Cantora.*

Algebra Cohena jest to uzupełnienie algebry Cantora. *Algebrą Jordana* nazwiemy natomiast maksymalną podalgebrę algebry Cohena, na której można określić miarę σ-addytywną μ w tym sensie, że $\mu(\bigvee_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$, o ile (A_n) są parami rozłączne i $\bigvee_n A_n$ jest elementem algebry. Jest wiele takich algebr, są one jednak wzajemnie izomorficzne.

W pracy [BN07] udowodniliśmy, że jeśli na algebrze Boole'a nie istnieje miara jednostajnie regularna, to można na niej zdefiniować miarę nieośrodkową. Pojawia się tu pytanie, czy podobne twierdzenie, łączące jednorodną regularność z typem Maharam, zachodzi dla miar ściśle dodatnich. W pracy [2] pokazaliśmy, że nie: istnieje algebra Boole'a ze ściśle dodatnią miarą, na której wszystkie miary są ośrodkowe, ale która nie ma przeliczalnej π-bazy (i skutkiem tego nie ma ściśle dodatniej miary jednostajnie regularnej). To właśnie ten przykład przestrzeni typu *suslinowskiego* doprowadził nas do sformułowania Hipotezy (S).

1.2.4 Miary na przestrzeniach suslinowskich w modelu Solovaya.

W świetle Twierdzenia 3 naturalnym przypuszczeniem dotyczącym Hipotezy (S) jest to, że pociąga ją MA_{ω_1} lub nawet tylko $\mathsf{MA}_{\omega_1}(\mathrm{ma})$. W istocie, w pracy [Kam89] Kamburelis udowodnił odpowiednik Twierdzenia 3 dla algebr z miarą ściśle dodatnią: przy założeniu $\mathsf{MA}_{\omega_1}(\mathrm{ma})$ każda algebra Boole'a mocy co najwyżej ω_1, na której można zdefiniować ściśle dodatnią miarę, jest σ-scentrowana. W pracy [4] wykorzystując metody z dowodu Twierdzenia 3 wzmocniliśmy nieco ten wynik:

Twierdzenie 12. [4, Twierdzenie 4.4] *Załóżmy, że $\mathrm{cov}(\mathcal{N}_{\omega_1}) > \omega_1$. Wówczas każda przestrzeń zwarta z miarą ściśle dodatnią i o π-ciężarze mniejszym od ω_2, jest ośrodkowa.*

Twierdzenie to mogłoby sugerować, że rezultaty osiągnięte przy założeniu MA_{ω_1} przez Juhasza i innych dla przestrzeni ccc będą miały swój odpowiednik dla przestrzeni z miarą wykorzystujący jedynie $\mathsf{MA}_{\omega_1}(\mathrm{ma})$. Okazało się jednak, że w przypadku przestrzeni z miarą zachodzą pewne nowe zjawiska. Dotyczą one zwłaszcza przestrzeni z małych π-charakterem.

Przypomnijmy, że przez model Solovaya (zwany także *modelem random*) rozumie się zazwyczaj model teorii mnogości powstały z uniwersum konstruowalnego poprzez forcing algebrą $\mathrm{Bor}(2^{\omega_2})/\mathcal{N}_{\omega_2}$. W książce Talagranda [Tal84] wyodrębniony został pewien aksjomat, którego sformułowanie nie jest może najbardziej urodziwe, ale który ujmuje pewne kombinatoryczne własności modelu Solovaya.

Definicja 13. *Założenie*

$$\mathrm{cov}(\mathcal{N}_{\omega_2}) = \mathfrak{c} \quad \wedge \quad \mathrm{non}(\mathcal{N}) = \omega_1 \quad \wedge \quad \mathfrak{c} = \omega_2$$

nazwiemy aksjomatem $(\mathfrak{R})$.

Kolejne dwa twierdzenia udowodnione są przy założeniu aksjomatu $(\mathfrak{R})$ (a więc zachodzą w modelu Solovaya).

Twierdzenie 14. [4, Twierdzenie 5.5] *Załóżmy aksjomat* $(\mathfrak{R})$*. Wówczas każda przestrzeń zwarta z miarą ściśle dodatnią, która ma* π*-charakter mniejszy od* ω_2*, jest ośrodkowa.*

Twierdzenie 15. ([4, Twierdzenie 5.6]) *Załóżmy aksjomat* $(\mathfrak{R})$*. Wówczas każda przestrzeń zwarta z miarą ściśle dodatnią, która ma przeliczalny* π*-charakter, ma przeliczalną* π*-bazę.*

Przypomnijmy, że nieośrodkowa przestrzeń ccc, która ma przeliczalny π-charakter istnieje w ZFC (por. Twierdzenie 4). Powyższe twierdzenia pokazują więc, że w królestwie przestrzeni z małym π-charakterem warunek istnienia ściśle dodatniej miary jest znacząco silniejszy niż ccc [2].

Nasuwa się tu pytanie, czy w powyższych twierdzeniach aksjomat $(\mathfrak{R})$ da się osłabić do założenia $\mathrm{cov}(\mathcal{N}_{\omega_1}) > \omega_1$, a więc do $\mathsf{MA}_{\omega_1}(\mathrm{ma})$. Byłoby to naturalne w kontekście Twierdzenia 12. Okazuje się, że nie jest to możliwe. Jak zobaczymy w rozdziale 1.2.5, przy założeniu aksjomatu Martina teza tych twierdzeń po prostu nie jest prawdziwa, tzn. istnieje nieośrodkowa przestrzeń zwarta o przeliczalnym π-charakterze z miarą ściśle dodatnią.

1.2.5 Nowe przykłady przestrzeni suslinowskich

W naszych poszukiwaniach nowego przykładu małej przestrzeni zwartej nieośrodkowej z miarą ściśle dodatnią przełomowa okazała się następująca czysto heurystyczna obserwacja. Otóż przykłady małych przestrzeni suslinowskich znane z literatury (opisane w rozdziale 1.2.1), chociaż konstruowane za pomocą różnych metod, nieoczekiwanie miały pewną wspólną cechę: miały liniowe włókna (ang. były *linearly fibered*).

Definicja 16. *Przestrzeń zwarta* K *ma liniowe włókna, jeżeli istnieje ciągłe odwzorowanie* $f\colon K \to M$*, gdzie* M *jest pewną przestrzenią metryczną, takie, że* $f^{-1}[\{y\}]$ *jest przestrzenią liniowo uporządkowaną dla każdego* $y \in f[K]$*.*

Przestrzeniom takim poświęcimy więcej miejsca w rozdziale 1.2.8. Teraz wystarczy nam informacja, że każda taka przestrzeń spełnia własność $(\flat)$. Analiza zachowania miar na przestrzeniach z małymi włóknami doprowadziła nas do następującego wyniku.

Twierdzenie 17. ([4, Twierdzenie 3.3]) *Załóżmy* MA*. Istnieje przestrzeń zwarta* K *ze ściśle dodatnią miarą, która ma przeliczalny* π*-charakter, jest nieośrodkowa i ma liniowe włókna (a więc spełnia* $(\flat)$*).*

Przestrzeń ta jest skonstruowana jako przestrzeń Stone'a pewnej algebry Boole'a generowanej przez podzbiory otwarto-domknięte 2^ω oraz pewną rodzinę domkniętych podzbiorów 2^ω konstruowaną przez indukcję pozaskończoną przy użyciu pewnego nietrywialnego lematu Fremlina.

Warto zwrócić uwagę na osobliwe zjawisko związane z Twierdzeniem 17 i Twierdzeniem 14. Otóż przestrzeń zwarta z miarą ściśle dodatnią, nieośrodkowa i o przeliczalnym π-charakterze istnieje przy założeniu MA, lecz nie istnieje w modelu Solovaya. Jest to, o ile nam wiadomo, pierwszy przykład przestrzeni typu suslinowskiego, której nie *zabija* aksjomat Martina (ani żadne jego niesprzeczne wzmocnienie), ale której istnienia nie da się udowodnić w ZFC. Być może jest to wskazówka, że model Solovaya lepiej eliminuje patologie przestrzeni z miarami niż aksjomat Martina.

Okazało się też, że jeśli osłabimy aksjomat Martina do założenia $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ (a więc do aksjomatu Martina dla algebr σ-scentrowanych), to wciąż istnieje przykład przestrzeni zwartej, która być może jest ośrodkowa, ale „nie na tyle”, żeby każda miara na niej była przeliczalnie zdeterminowana.

Twierdzenie 18. ([4, Twierdzenie 3.4]) *Załóżmy* $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$*. Wtedy istnieje zwarta przestrzeń z liniowymi włóknami (a więc mająca własność* $(\flat)$*) i z miarą ściśle dodatnią, która nie jest przeliczalnie zdeterminowana.*

[2] czy nawet, jak wskazuje analiza przykładu Todorčevića, własność Knastera.

Kolejny przykład małej przestrzeni nieośrodkowej z miarą ściśle dodatnią, wymagający jeszcze słabszych założeń niż te z Twierdzenia 17 jest modyfikacją przykładu Todorčevića użytego w dowodzie Twierdzenia 4.

Konstrukcja Todorčevića wykorzystuje *slalomy*, kombinatoryczne pojęcie używane w teorii mnogości prostej rzeczywistej. Fremlin i Kunen wykazali, że istnieje pewien $\subseteq^*$-wstępujący ciąg (wieża) slalomów, będący w pewnym sensie maksymalny. Todorčević skonstruował przy pomocy tej wieży swój przykład jako przestrzeń Stone'a pewnej algebry Boole'a, owej maksymalności używając do wykazania, że jest ona nieośrodkowa.

Przykład Todorčevića od początku badań pozostawał w sferze naszych zainteresowań, ale przez długi czas ulegaliśmy złudzeniu, że nie ma on miary ściśle dodatniej (przekonanie to, w prywatnej rozmowie, podzielał sam Todorčević, a w literaturze pojawił się nawet (nieadekwatny) dowód, że przestrzeń Todorčevića nie ma miary ściśle dodatniej). W pracy [3] pokazaliśmy że to, czy przestrzeń zdefiniowana w powyższy sposób ma miarę ściśle dodatnią czy nie, zależy od własności wieży slalomów Fremlina-Kunena.

Okazało się, że twierdzenie Fremlina-Kunena można wzmocnić żądając, by wieża, której istnienie to twierdzenie zapewnia, składała się ze slalomów będących w pewnym sensie elementami ideału zbiorów sumowalnych (*slalomów sumowalnych*). Ceną, którą trzeba jednak zapłacić, jest konieczność założenia pewnego dodatkowego aksjomatu (trzeba mianowicie założyć, że $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \mathrm{non}(\mathcal{M})$[3]). Przestrzeń stworzona z tej rodziny wedle przepisu Todorčevića będzie miała miarę ściśle dodatnią, a zatem prawdziwe będzie następujące twierdzenie.

Twierdzenie 19. ([3, Twierdzenie 5.4]) *Przy założeniu* $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \mathrm{non}(\mathcal{M})$ *istnieje nieośrodkowa przestrzeń zwarta* K *z miarą ściśle dodatnią i spełniająca* ($\flat$). *Co więcej,* K *ma przeliczalny* π*-charakter.*

Założenie $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \mathrm{non}(\mathcal{M})$ jest znacząco słabsze niż aksjomat Martina, więc Twierdzenie 19 jest wzmocnieniem Twierdzenia 17. Wspomnimy tutaj o metodzie dowodzenia faktu, że przestrzeń K ma miarę ściśle dodatnią. Zazwyczaj tego, że przestrzeń ma miarę o określonych własnościach, wykazuje się poprzez wskazanie tej miary. Nie jest jednak jasne, jak zdefiniować miarę ściśle dodatnią na przestrzeni K. Wygodne okazało się natomiast użycie dość mało znanego twierdzenia, które prawdopodobnie w zamyśle nie miało służyć jako kryterium istnienia miary ściśle dodatniej: twierdzenia sformułowanego przez Kamburelisa w [Kam89]. Otóż Kamburelis pokazał, że algebra Boole'a ma miarę ściśle dodatnią wtedy i tylko wtedy, gdy algebra ta jest σ-scentrowana w rozszerzeniu forcingowym pewną algebrą miarową. Okazało się, że forcing algebrą miary dodaje pewien szczególny slalom, niszczący maksymalność wieży Fremlina-Kunena, a tym samym „indukujący" ośrodek dla przestrzeni K.

Powyższa konstrukcja okazała się być dość elastyczna: można modyfikować ją na różne sposoby, otrzymując interesujące obiekty. Niektóre z nich omówimy w kolejnych rozdziałach.

1.2.6 Narost ω z miarą ściśle dodatnią i c_0-dopełnialność.

W pracy [3] odpowiadamy na poniższe pytanie.

Problem 20. *Czy istnieje podalgebra* $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$*, która nie jest* σ*-scentrowana i na której istnieje miara ściśle dodatnia (innymi słowy: czy istnieje uzwarcenie* ω *o naroście będącym nieośrodkową przestrzenią z miarą ściśle dodatnią)?*

W pracy [vM82] van Mill postawił pytanie, czy istnieje przestrzeń o nieco słabszych własnościach, a mianowicie czy istnieje uzwarcenie ω o naroście, który jest nieośrodkowy i ccc (oferując za odpowiedź

[3]Tak naprawdę wystarczy założenie, że $\mathrm{add}(\mathcal{N})$ równy jest pewnemu współczynnikowi kardynalnemu związanemu z ideałem sumowalnym.

nagrodę w postaci butelki whisky). Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca, a odpowiedni przykład podał Murray Bell ([Bel80]).

Problem 20 jest związany z pewnym intrygującym pytaniem, być może jednym z najważniejszych otwartych problemów dotyczących struktury $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$: czy algebra miary zanurza się w $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$? Przy założeniu Hipotezy Continuum, dzięki twierdzeniu Parovičenki, algebra miary - jako algebra Boole'a mocy ω_1 - zanurza się w $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$. Z kolei Dow i Hart w pracy [DH00] pokazali, że przy założeniu OCA (*Open Coloring Axiom*) algebry miary w $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ zanurzyć nie można.

Algebra miary nie jest σ-scentrowana, więc przy założeniu Hipotezy Continuum odpowiedź na Problem 20 jest twierdząca. Przypomnijmy także, że każda σ-scentrowana algebra Boole'a ma ściśle dodatnią miarę. Wobec tego powyższy problem można nieco nieściśle wyrazić następująco: czy w ZFC istnieje *nietrywialna* podalgebra algebry miary, którą można zanurzyć w $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$?

W pracy [DP15] Drygier i Plebanek podają konstrukcję podalgebry $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ z miarą ściśle dodatnią, która nie jest σ-scentrowana, przy pewnym stosunkowo słabym założeniu teoriomnogościowym. Okazuje się jednak, że do konstrukcji takiej algebry nie są potrzebne dodatkowe aksjomaty.

Twierdzenie 21. ([3, Twierdzenie 5.7]) *Istnieje podalgebra $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$ z miarą ściśle dodatnią, która nie jest σ-scentrowana*

Konstrukcja tej algebry Boole'a jest podobna do tej z dowodu Twierdzenia 19. Tym razem zamiast wieży slalomów rozważamy rodzinę wszystkich slalomów sumowalnych i to z niej budujemy, sposobem Todorčevića, algebrę Boole'a. Nie będzie ona miała tym razem własności ($\flat$) (gwarantowaną wcześniej przez „liniowość" wieży Fremlina-Kunena), ale za to do jej stworzenia nie potrzebujemy żadnych dodatkowych aksjomatów teoriomnogościowych. Łatwo też pokazać, że można ją zanurzyć w $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$.

Algebra Boole'a skonstruowana powyżej ma jeszcze jedną interesującą własność. Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha, a Y jej domkniętą podprzestrzenią. Powiemy, że Y jest *dopełnialna* w X, jeśli istnieje projekcja $p\colon X \to X$ taka, że $p[X] = Y$. Zauważmy, że jeżeli K jest uzwarceniem ω, to $\{f \in C(K)\colon \forall x \in K \setminus \omega\ f(x) = 0\}$ jest kopią c_0 w $C(K)$. Nazwiemy ją *naturalną kopią* c_0. W ostatnich latach problem dopełnialności naturalnej kopii c_0 w przestrzeniach $C(K)$, gdzie K jest uzwarceniem ω, wzbudził pewne zainteresowanie. Wiesław Kubiś zauważył, że jeśli naturalna kopia c_0 jest dopełnialna w $C(K)$, to narost K ma miarę ściśle dodatnią.

W pracy [DP16] Drygier i Plebanek pokazali, że przy założeniu Hipotezy Continuum istnieje takie uzwarcenie K przestrzeni ω z nieośrodkowym narostem, że naturalna kopia c_0 w $C(K)$ jest dopełnialna. W pracy [3] pokazaliśmy, że twierdzenie to jest prawdziwe bez konieczności zakładania dodatkowych aksjomatów.

Twierdzenie 22. ([3, Wniosek 5.16]) *Istnieje takie uzwarcenie K przestrzeni ω o nieośrodkowym naroście, że naturalna kopia c_0 jest dopełnialna w $C(K)$.*

Owo uzwarcenie jest przestrzenią Stone'a algebry Boole'a skonstruowanej w dowodzie Twierdzenia 21. Aby pokazać, że spełnia ono tezę twierdzenia, skorzystaliśmy z rezultatu udowodnionego w pracy [DP16], mówiącego, że naturalna kopia c_0 jest dopełnialna w $C(K)$, gdzie K jest uzwarceniem ω, jeśli istnieje pewien szczególny ciąg miar znakowanych na K. Nasz dowód polega właśnie na konstrukcji takiego ciągu. Miary tworzące ten ciąg są definiowane w dość niestandardowy sposób, poprzez nazwy na pewne obiekty w rozszerzeniu forcingowym algebrą miarową.

1.2.7 Algebry Boole'a, które są σ-połączone, a nie mają miary ściśle dodatniej

Używając metod opisanych w poprzednich dwóch rozdziałach, konstruujemy także przykłady algebr Boole'a spełniających dość silne warunki łańcuchowe, ale nie mające miary ściśle dodatniej. Powiemy, że rodzina zbiorów jest *n-połączona* (ang. *n-linked*), jeśli jej każdy n-elementowy podzbiór ma niepusty przekrój, natomiast algebra Boole'a $\mathfrak{A}$ jest σ-n-połączona, jeśli $\mathfrak{A} \setminus \{\emptyset\}$ jest przeliczalną sumą rodzin n-połączonych.

Twierdzenie 23. ([3, Twierdzenie 5.19]) *Istnieje algebra Boole'a $\mathfrak{A}$ mocy $\mathrm{add}(\mathcal{N})$, która jest σ-n-połączona dla każdego n i która nie ma miary ściśle dodatniej. Co więcej, $\mathfrak{A}$ ma własność* ($\flat$).

Istnieją klasyczne przykłady algebr Boole'a, które są σ-n-połączone dla każdego n i które nie mają miary ściśle dodatniej, np. algebra Gaifmana, patrz [Fre04]. Istotne jest więc, że $\mathfrak{A}$ ma własność ($\flat$), bo o ile nam wiadomo nie były znane przykłady małych algebr, które są σ-2-połączone, a na których nie można zdefiniować miary ściśle dodatniej. Z powyższego twierdzenia wynika też, że istnieje algebra Boole'a mocy $\mathrm{add}(\mathcal{N})$ bez miary ściśle dodatniej, co jest interesujące w kontekście pytań o najmniejszą moc algebry Boole'a bez miary ściśle dodatniej (rozważanych np. w pracy [DP08]). Idea dowodu Twierdzenia 23 jest podobna do dowodu Twierdzenia 19. Tym razem, żeby wykluczyć istnienie miary ściśle dodatniej, należy skonstruować prawie wstępującą rodzinę slalomów, jak w twierdzeniu Fremlina-Kunena, której maksymalności nie zabije forcing algebrą miary. Taką rodzinę można znaleźć używając technik z pracy Judaha i Shelaha [JS90].

W pracy [3] rozważaliśmy jeszcze jeden, nieco mniej znany, warunek łańcuchowy. Powiemy, że algebra Boole'a $\mathfrak{A}$ spełnia *warunek* (F), jeżeli $\mathfrak{A} \setminus \{\emptyset\} = \bigcup_n \mathcal{A}_n$, gdzie dla każdego n z każdego nieskończonego podzbioru $\mathcal{A}_n$ można wybrać nieskończony zbiór scentrowany. Warunek ten, który wydaje się być niezwykle bliski warunkowi σ-scentrowania, został sformułowany przez Fremlina w [Fre04]. Fremlin pokazał tam, że każda algebra Maharam spełnia (F). Todorčević udowodnił natomiast, że algebra Gaifmana spełnia (F) ([Fre04, Stwierdzenie 6A]). Fremlin podejrzewał, że uzupełnienie algebry Gaifmana może się okazać algebrą Maharam[4]. Dobrinen pokazała później, że tak nie jest (patrz [Dob04]).

Twierdzenie 24. ([3, Twierdzenia 5.23 i 5.24]) *Istnieje algebra Boole'a $\mathfrak{F}$ spełniająca* (F) *i będąca σ-n-połączona dla każdego n, bez miary ściśle dodatniej. Niesprzecznie można założyć, że $\mathfrak{A}$ spełnia również własność* ($\flat$).

Jak wspomnieliśmy wcześniej, algebry Boole'a bez miary ściśle dodatniej spełniające warunek (F) były znane. O ile nam wiadomo, nieznane były jednak przykłady małe. Konstrukcja algebry $\mathfrak{F}$ jest podobna do konstrukcji poprzednich przykładów. Tym razem jednak zamiast slalomów sumowalnych, użyliśmy slalomów będących w pewnym sensie elementami ideału asymptotycznej gęstości 0. Dowód faktu, że $\mathfrak{F}$ spełnia (F) jest dość żmudny. To, że nie ma ona miary ściśle dodatniej wynika natomiast z twierdzenia Brendle-Yatabe, mówiącego, że ideał zbiorów asymptotycznej gęstości 0 nie jest zniszczalny przez dodanie liczby Solovaya. Twierdzenie 24 wzbudziło w nas chwilowe nadzieje, że powyższymi metodami można skonstruować nowy przykład algebry Maharam bez miary ściśle dodatniej. Prawdopodobnie jest to jednak niemożliwe. Pokazaliśmy, że każda algebra Boole'a skonstruowana przez nas w dowodzie Twierdzenia 24 dodaje liczbę Cohena (co znaczy, że jej uzupełnienie nie jest słabo (ω,ω)-dystrybutywne, a tym samym nie może być algebrą Maharam). Argument wydaje się dość ogólny i dotyczy prawdopodobnie wszelkich konstrukcji używających metod podobnych do powyższych.

1.2.8 Miary na przestrzeniach z małymi włóknami.

Przykłady omówione w rozdziale 1.2.5 zwróciły nasza uwagę na pojęcie przestrzeni z liniowymi włóknami. Ma ono narzucające się uogólnienie.

Definicja 25. *Niech φ będzie własnością (np. topologiczną, kombinatoryczną lub miarową). Przestrzeń K jest* przestrzenią z włóknami spełniającymi φ, *jeśli istnieje odwzorowanie ciągłe $f\colon K \to M$, gdzie M jest przestrzenią metryczną takie, że $f^{-1}[\{y\}]$ ma własność φ dla każdego $y \in f[K]$.*

[4] Przypomnijmy, że przykład algebry Maharam bez miary ściśle dodatniej przyniósłby nowe rozwiązanie sławnego problemu Maharam. Jedyny znany obecnie przykład takiej algebry, podany przez Talagranda, jest wyjątkowo zawiły.

Badanie włókien odwzorowań na przestrzenie metryczne może dostarczyć cennych informacji o własnościach danej przestrzeni. Dotyczy to w szczególności własności ($\flat$), która często opiera się próbie bezpośredniego dowodu i której zazwyczaj dowodzi się wykazując jakąś silniejszą niż ($\flat$) własność. Np. w pracach [Bel96], [Moo99] i [Tod00] tego, że pewne przestrzenie mają własność ($\flat$) dowodzi się poprzez wykazanie, że mają one liniowe włókna.

Badania nad włóknami przestrzeni topologicznych prowadził m. in. Tkaczenko w pracy [Tka91], który pokazał w szczególności, że jeśli K jest przestrzenią z włóknami o własności ($\flat$), to K ma własność ($\flat$). W pracy [1] byliśmy zainteresowani podobnymi zagadnieniami w kontekście własności miarowych, takich jak ($\sharp$).

Zadaliśmy np. pytanie, czy stwierdzenie analogiczne do twierdzenia Tkaczenki jest prawdziwe dla własności ($\sharp$). Przy negacji $\mathsf{MA}_{\omega_1}(\mathrm{ma})$ istnieje kompakt Corsona z miarą nieośrodkową i z metryzowalnymi włóknami (taki przykład konstruują np. Kunen i van Mill w dowodzie Twierdzenia 5). Ponieważ na przestrzeniach metryzowalnych wszystkie miary są ośrodkowe, przykład ten pokazuje, że przy negacji $\mathsf{MA}_{\omega_1}(\mathrm{ma})$ odpowiednik twierdzenia Tkaczenki dla ($\sharp$) nie zachodzi. Pokazaliśmy jednak, że taki przykład nie istnieje, jeśli $\mathsf{MA}_{\omega_1}(\mathrm{ma})$ jest spełniony.

Twierdzenie 26. ([1, Twierdzenie 2.4]) *Załóżmy* $\mathsf{MA}_{\omega_1}(\mathrm{ma})$. *Wówczas każda przestrzeń zwarta z włóknami spełniającymi własność ($\sharp$) ma własność ($\sharp$).*

W dowodzie konstruujemy miary na włóknach w sposób znany np. z twierdzeń o dezintegracji miary używając przy tym faktu, że $\mathsf{MA}_{\omega_1}(\mathrm{ma})$ jest równoważny stwierdzeniu, że ω_1 jest prekalibrem algebr miarowych.

Twierdzenie 27. ([1, Twierdzenie 3.1]) *Jeśli K jest przestrzenią zwartą zerowymiarową z rozproszonymi włóknami, to każda miara na K jest ośrodkowa (czyli K ma własność ($\sharp$)).*

Przypomnijmy, że przestrzeń zwarta K jest rozproszona, jeśli każda miara określona na K jest czysto atomowa. Tak więc przestrzeń, niesprzecznie, może mieć miarę nieośrodkową, jeśli nawet wszystkie jej włókna mają własność ($\sharp$). Jeśli jednak założymy, że włókna mają tylko miary czysto atomowe, to cała przestrzeń nie może mieć miary nieośrodkowej.

Znana jest cała lista warunków, które pociągają własność ($\flat$) (własność ($\flat$) mają m. in. przestrzenie liniowo uporządkowane, kompakty Rosenthala, kompakty Eberleina czy przestrzenie Stone'a algebr minimalnie generowanych). Twierdzenie 27 i Twierdzenie 26 wzbogacają tę listę. Dodajmy, że fakt, że dana klasa przestrzeni ma własność ($\sharp$) może być interesujący z wielu powodów. Na przykład, jeśli K spełnia własność ($\sharp$), to $C(K)$ nie jest przestrzenią Grothendiecka (czyli, mówiąc skrótowo, nie jest przestrzenią bez nietrywialnych zbieżnych ciągów miar).

W pracy [1] pokazaliśmy też, że choć istnieją przestrzenie zwarte nieośrodkowe z włóknami mocy 2, to nieośrodkowych przestrzeni zwartych z miarą ściśle dodatnią, nie znajdziemy wśród przestrzeni ze skończonymi włóknami ([1, Twierdzenie 3.4])

1.3 Inne wyniki osiągnięte po doktoracie.

1.3.1 Narosty uzwarceń ω ze ściśle dodatnią miarą.

Praca [BNZ17] zawiera kontynuację badań opisanych w rozdziale 1.2.6, którą prowadziliśmy z Tomaszem Żuchowskim.

Podajemy w niej trzy konstrukcje podalgebr $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$, które nie są σ-scentrowane i które mają ściśle dodatnią miarę. Jedna z nich to konstrukcja opisana w rozdziale 1.2.6. Tym razem dowodzimy istnienia ściśle dodatniej miary nie używając języka forcingu, lecz kryterium Kelleya. Kolejna z konstrukcji (przeprowadzona za pomocą zupełnie innych metod) ma dodatkową ciekawą własność: jest ona podzbiorem rodziny zbiorów posiadających asymptotyczną gęstość i to w taki sposób, że asymptotyczna gęstość staje się na niej miarą ściśle dodatnią. W pracy pokazujemy także, że klasyczny przykład Bella podalgebry $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$, która jest ccc i nie jest σ-scentrowana, ma miarę ściśle dodatnią.

1.3.2 Wieże i luki Hausdorffa.

Choć w pracy [BNC15] nie występuje explicite pojęcie miary, motywacją jej powstania był problem, który pojawił się przy próbie skonstruowania kontrprzykładu dla Hipotezy (S). Problem ten brzmi: czy istnieje taka wieża $\mathcal{T}$ (tzn. rodzina podzbiorów nieskończonych ω dobrze uporządkowana przez $\subseteq^*$) długości ω_1, że żadne jej dwa elementy nie pozostają w relacji inkluzji? (Takie wieże nazwiemy *wieżami bez inkluzji*). Ostatecznie okazało się, że rozwiązanie tego problemu nie przydało się w konstrukcjach przestrzeni zwartych z miarami. Doprowadziło jednak do rozwiązania pewnego znanego otwartego problemu dotyczącego luk w $\mathcal{P}(\omega)/\mathrm{Fin}$. Badania te prowadziliśmy z Davidem Chodounskym.

Wieżę $\mathcal{T}$, która nie ma nieprzeliczalnych $\subseteq$-antyłańcuchów (tzn. takich rodzin $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$, że żadne dwa elementy $\mathcal{A}$ nie są $\subseteq$-porównywalne) nazwaliśmy *wieżą Suslina*. Tak więc wieże, które nie są Suslina, mają nieprzeliczalną pod-wieżę bez inkluzji.

Okazało się, że wieżę, która nie jest Suslina, najprościej uzyskać biorąc „połowę" (ω_1, ω_1)-luki spełniającej warunek Hausdorffa. Przypomnijmy, że $(L_\alpha, R_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ nazywamy (ω_1, ω_1)-luką, jeśli $L_\alpha \subseteq^* L_\beta$ i $R_\alpha \subseteq^* R_\beta$ dla każdego $\alpha < \beta < \omega_1$, $L_\alpha \cap R_\alpha = \emptyset$ oraz nie istnieje taki zbiór $L \subseteq \omega$, że $L_\alpha \subseteq^* L$ i $L \cap R_\alpha =^* \emptyset$ dla każdego $\alpha < \omega_1$. Warunek Hausdorffa jest pewnym technicznym warunkiem, którego Hausdorff użył w dowodzie, że (ω_1, ω_1)-luki istnieją w ZFC. Wieże, spełniające warunek analogiczny do warunku Hausdorffa dla luk, nazwaliśmy *wieżami Hausdorffa*. Wieże Hausdorffa (a zatem również wieże bez inkluzji) istnieją więc w ZFC. Udowodniliśmy też m. in. następujące twierdzenia:

- ([BNC15, Wniosek 19]) przy założeniu MA_{ω_1} wszystkie wieże długości ω_1 są wieżami Hausdorffa,
- ([BNC15, Stwierdzenie 16]) przy założeniu OCA (*Open Coloring Axiom*) nie istnieje wieża Suslina,
- ([BNC15, Stwierdzenie 12]) jeśli wieża generuje ten sam ideał, co wieża Hausdorffa, to jest wieżą Hausdorffa,
- ([BNC15, Twierdzenie 21])) przy założeniu MA_{ω_1} każdą wieżę długości ω_1 można zmodyfikować, do każdego jej elementu dodając lub odejmując co najwyżej jeden punkt, by otrzymać w rezultacie wieżę bez inkluzji,
- ([BNC15, Twierdzenie 23]) przy założeniu PID (*P-ideal dichotomy*) każda wieża długości ω_1 jest Hausdorffa wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathfrak{b} > \omega_1$ (niezależnie, podobny wynik został otrzymany przez Raghavana i Todorčevića w pracy [RT14]).

W pracy zajęliśmy się także analizą struktury wież za pomocą porządków Tukeya (w duchu podobnego projektu dotyczącego ultrafiltrów, patrz [DT11]). Okazało się, że wieże Hausdorffa można scharakteryzować jako te wieże długości ω_1, które są maksymalne w sensie Tukeya ([BNC15, Twierdzenie 54]). Wynik ten wydaje się wskazywać, że wyizolowanie pojęcia wież Hausdorffa było trafnym posunięciem.

Rozważania dotyczące wież okazały się mieć zastosowania w badaniu luk. W pracy [Sch93] Scheepers postawił następujące problemy: „czy każda luka specjalna jest równoważna luce Hausdorffa?" oraz „czy każda luka specjalna jest lewo-orientowalna?" (Luka jest specjalna, jeśli jest niezniszczalna przez forcing spełniający warunek ccc; lewo-orientowalność jest natomiast bardziej techniczną własnością.) Hirschorn w pracy [Hir08], która nigdy nie została ostatecznie opublikowana, podał przykład luki, która jest specjalna, ale nie jest równoważna luce lewo-orientowalnej. My - stosując zupełnie inne metody - podaliśmy parę niesprzecznych przykładów luk specjalnych, które nie są równoważne luce Hausdorffa. M. in. skonstruowaliśmy (metodami forcingowymi) lukę, która jest specjalna, ale nie jest równoważna luce lewo-orientowalnej, natomiast po zamianie „połówek" miejscami staje się luką lewo-orientowalną, która nie jest równoważna luce Hausdorffa ([BNC15, Twierdzenie 41]).

Jeden z problemów postawionych w pracy został potem rozwiązany przez Lopeza i Todorčevića w pracy [LT17].

1.3.3 Domknięcie ciągowe w przestrzeniach miar.

W swoich badaniach zajmowaliśmy się nie tylko zagadnieniem istnienia miar o określonych własnościach na przestrzeniach zwartych, ale także własnościami przestrzeni miar (zagadnienia te są zresztą ściśle ze sobą związane). Przypomnijmy, że każda przestrzeń zwarta X zanurza się homeomorficznie w $P(X)$, czyli w przestrzeni miar probabilistyczych na X z topologią *-słabą (zanurzenie to jest dane wzorem: $x \mapsto \delta_x$, gdzie δ_x jest deltą Diraca punktu x).

Niech K będzie przestrzenią zwartą. Najprostszymi elementami $P(K)$ są miary o skończonych nośnikach, a więc kombinacje wypukłe delt Diraca (rodzinę tę nazwiemy $S_0(K)$). Nieco bardziej skomplikowane są granice ciągów miar o skończonych nośnikach ($S_1(K)$). W ten sposób można skonstruować wstępujący ciąg $(S_\alpha(K))_{\alpha<\omega_1}$ podzbiorów $P(K)$. Zauważmy, że $S_{\omega_1}(K) = S(K)$ jest ciągowym domknięciem rodziny miar o skończonych nośnikach.

Dla wielu przestrzeni K mamy $S_1(K) = P(K)$ (dzieje się tak wtedy, gdy K ma tzw. ciąg równomiernie rozłożony). W rozważaniach zawartych w pracy [BNP10] w naturalny sposób pojawiły się przestrzenie $S_\alpha(K)$ dla $\alpha > 1$. Powstało więc pytanie: czy istnieje taka przestrzeń K, że $S_1(K) \subsetneq S(K)$ czy też ciągowe domknięcie zbioru miar o skończonych nośnikach musi zostać osiągnięte już w pierwszym kroku powyższej konstrukcji, a więc $S_\alpha(K) = S_1(K)$ dla każdej przestrzeni K i $\alpha \leq \omega_1$.

W pracy [BNS12] wspólnie z Omarem Selimem pokazaliśmy, że dla każdego $\beta \leq \omega_1$ istnieje przestrzeń zwarta K, dla której ciąg $(S_\alpha(K))_{\alpha<\beta}$ jest ściśle wstępujący, natomiast $S_\beta(K) = S(K)$. Chociaż sama konstrukcja takich przestrzeni nie jest zawiła, uzasadnienie, że mają one żądane własności okazało się być dość wymagające technicznie.

Powyższy problem rozważany był także w pracy [APR13], w której autorzy podali inny przykład takiej przestrzeni K, że $S_1(K) \neq S_2(K)$. Przykład ten ma własność, której nie mają przestrzenie skonstruowane w naszej pracy: $S_2(K) = P(K)$. Z drugiej strony wymaga on założenia Hipotezy Continuum.

1.3.4 Współczynniki kardynalne związane z porządkami na ideałach.

Motywacją dla badań zawartych w pracy [BNF12] również były własności przestrzeni miar. Wspólnie z Barnabásem Farkasem zajęliśmy się w niej mianowicie *wypukłą* wersją własności Frécheta-Urysohna. Powiemy, że (całkowicie regularna) przestrzeń X spełnia *wypukły warunek Frécheta-Urysohna*, jeżeli dla każdego $A \subseteq X$ i dla każdego $x \in \overline{A}$ istnieje ciąg miar z domknięcia wypukłego zbioru A *-słabo zbieżny do δ_x. Własność ta pojawiła się w naturalny sposób (choć nie explicite) w pracy [BNP10] w rozważaniach, czy istnieje przestrzeń Banacha, która jest przestrzenią Mazura, ale nie spełnia warunku Gelfanda-Phillipsa.

Przypomnijmy, że najmniejszym ciężarem przeliczalnej przestrzeni (całkowicie regularnej), która nie jest Frécheta-Urysohna jest $\mathfrak{p}$ (*pseudo-intersection number*). Analogiczny współczynnik można zdefiniować dla wypukłego warunku Frécheta-Urysohna (*wypukłą* wersję współczynnika $\mathfrak{p}$ - $\mathfrak{p}_{\mathrm{conv}}$). Okazuje się, że współczynnik ten można scharakteryzować następująco:

$$\mathfrak{p}_{\mathrm{conv}} = \min\{|\mathcal{F}| \colon \mathcal{F} \not\leq_K \mathcal{Z}\},$$

gdzie $\mathcal{Z}$ jest ideałem asymptotycznej gęstości zero, a $\leq_K$ jest porządkiem Katetova na ideałach podzbiorów ω ([BNF12, Twierdzenia 3.2 i 3.6]). Fakt ten zainspirował nas z kolei do rozważania następujących współczynników związanych z ideałami podzbiorów ω:

$$\mathfrak{p}_{\mathcal{I}} = \min\{|\mathcal{F}| \colon \mathcal{F} \not\leq_K \mathcal{I}\}.$$

W tym sensie $\mathfrak{p}_{\mathrm{conv}} = \mathfrak{p}_{\mathcal{Z}}$. Ponieważ $\mathfrak{p}_{\mathrm{Fin}} = \mathfrak{p}$ współczynniki te są uogólnieniem (*idealizacją*) współczynnika $\mathfrak{p}$.

W pracy [BNF12] pokazaliśmy m. in., że w standardowym modelu Cohena istnieje ideał $\mathcal{I}$, dla którego $\mathfrak{p} < \mathfrak{p}_{\mathcal{I}}$ ([BNF12, Twierdzenie 4.3]). Z drugiej strony można pokazać, że niesprzecznie $\mathfrak{p}_{\mathcal{I}} = \omega_1$ dla wszystkich ideałów $\mathcal{I}$ na ω przy czym $\mathfrak{c}$ jest dowolnie duże ([BNF12, Twierdzenie 4.5]).

W pracy [BNF12] wskazujemy, jak można rozwijać tę tematykę - np. rozważając inne porządki niż porządek Katetova na ideałach lub modyfikacje współczynników innych niż $\mathfrak{p}$. Pokazujemy np., że analogiczna wersja współczynnika $\mathfrak{a}$ (*almost disjointness number*) jest dobrze zdefiniowana dla analitycznych P-ideałów przy założeniu aksjomatu Martina dla porządków σ-scentrowanych ([BNF12, Twierdzenie 5.3]). Rozważaliśmy także pytanie, czy niesprzecznie istnieje analityczny P-ideał $\mathcal{I}$, dla którego $\mathfrak{p} < \mathfrak{p}_{\mathcal{I}}$. Wydaje się, że problem ten wzbudził zainteresowanie matematyków zajmujących się ideałami podzbiorów ω (np. z inicjatywy Michaela Hrušaka był on przedmiotem badań jednej z grup roboczych na *3rd Young Set Theory Workshop* w Raach). Pozostaje on nadal otwarty.

1.3.5 Sumowalność ideałów w przestrzeniach Banacha i w grupach polskich.

Przypomnijmy, że ideał $\mathcal{I}$ podzbiorów ω jest *sumowalny*, jeśli istnieje taka funkcja $f \colon \omega \to \mathbb{R}^+$, że

$$A \in \mathcal{I} \iff \sum_{n \in A} f(n) < \infty.$$

W pracy [BNFP15] wraz z Barnabásem Farkasem i Grzegorzem Plebankiem rozważaliśmy pewne naturalne uogólnienie tej definicji. Niech X będzie wyposażony w strukturę algebraiczną i topologiczną (tak, aby pojęcie zbieżności szeregów w X miało sens). Powiemy, że ideał $\mathcal{I}$ podzbiorów ω jest *sumowalny w X*, jeżeli istnieje taka funkcja $f \colon \omega \to X$, że

$$A \in \mathcal{I} \iff \text{szereg } \sum_{n \in A} f(n) \text{ jest bezwarunkowo zbieżny.}$$

Okazało się, że w języku sumowalności da się w bardzo naturalny sposób scharakteryzować podstawowe własności ideałów na ω. W pracy [BNFP15] udowodniliśmy m. in. co następuje (dla ideałów podzbiorów ω):

- każdy ideał jest sumowalny w pewnej grupie abelowej,
- ideał jest analitycznym P-ideałem wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumowalny w jakiejś grupie polskiej,
- ideał jest niepatologicznym analitycznym P-ideałem wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumowalny w jakiejś przestrzeni Banacha.

Zajmowaliśmy się również sumowalnością ideałów w konkretnych przestrzeniach Banacha. Ważna była tu przede wszystkim przestrzeń c_0, okazało się bowiem, że znajomość funkcji świadczących o sumowalności ideałów w c_0 ułatwia analizę własności tych ideałów (pozwalając zobaczyć te ideały w bardziej namacalny sposób). Interesujące jest też pytanie, które ideały są sumowalne w c_0. Pokazaliśmy, że ideał $\mathrm{tr}(\mathcal{N})$ (*trace of null*) nie jest sumowalny w c_0 ([BNFP15, Wniosek 5.6]) oraz że gęste ideały typu F_σ, które nie są sumowalne, nie są też sumowalne w c_0 ([BNFP15, Twierdzenie 5.7]), co może oznaczać, że *nietrywialne* ideały sumowalne w c_0 są raczej związane z ideałami gęstości.

Studiowaliśmy również zagadnienie sumowalności ideałów w ℓ_1. Nasza wstępna hipoteza, że są to po prostu ideały sumowalne, okazała się nieprawdziwa. Używając metod analizy funkcjonalnej skonstruowaliśmy ideał (nazwany przez nas *ideałem Rademachera*), który jest sumowalny w ℓ_1, lecz nie jest sumowalny ([BNFP15, Twierdzenie 6.1]). O ile nam wiadomo, jest to nowy przykład ideału typu F_σ.

Wyniki te wskazują, że dzięki pojęciu uogólnionej sumowalności ideałów teoria przestrzeni Banacha może pomóc w głębszym zrozumieniu struktury ideałów na ω i w znalezieniu nowych, interesujących przykładów takich ideałów.

1.3.6 Ideały Mokobodzkiego i kofinalność σ-ideałów na produktach przestrzeniach polskich.

Ideałem Mokobodzkiego nazywamy σ-ideał podzbiorów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ generowany przez zbiory borelowskie, których wszystkie cięcia pionowe są miary Lebesgue'a zero. Ideały te były rozważane m. in. przez Cichonia i Pawlikowskiego w pracy [CP86]. Dowiedziono tam m. in., że addytywność tego ideału wynosi ω_1 oraz, że ideał ten nie ma bazy składającej się ze zbiorów borelowskich o ograniczonej złożoności borelowskiej (w przeciwieństwie np. do ideału zbiorów miary zero, który ma bazę zbiorów typu G_δ). Tą ostatnią własność nazwiemy *własnością złożonej bazy*. Były to wyniki dość nieoczekiwane, świadczące o tym, że struktura ideałów Mokobodzkiego jest daleka od struktury ideału zbiorów miary Lebesgue'a zero.

W pracy [BNG11] wraz z Szymonem Głąbem udowodniliśmy twierdzenie ([BNG11, Twierdzenie 3.3]), z którego wynika, że podobne własności ma wiele innych σ-ideałów (nazwanych przez nas *uogólnionymi ideałami Mokobodzkiego*) na płaszczyźnie czy, ogólniej, produktach przestrzeni polskich, np. σ-ideał podzbiorów płaszczyzny, które są miary Lebesgue'a zero (lub pierwszej kategorii Baire'a) *we wszystkich kierunkach* lub na wykresach wszystkich wielomianów. Pokazaliśmy też, że jeśli $\mathcal{I}$ jest uogólnionym ideałem Mokobodzkiego, to spełnia w istocie nieco silniejszą własność niż własność złożonej bazy, a mianowicie dla każdego $3 < \alpha < \omega_1$ rodzina $\mathcal{I} \cap \Sigma^0_{\alpha+2}$ nie zawiera się w ideale generowanym przez $\mathcal{I} \cap \Sigma^0_\alpha$.

Oczywisty fakt mówiący, że własność złożonej bazy pociąga za sobą to, że addytywność ideału jest równa ω_1, zainspirował nas do zdefiniowania współczynnika cofin dla ideału (w duchu współczynnika, który rozważa się np. w kontekście przestrzeni Banacha czy algebr Boole'a):

$$\mathrm{cofin}(\mathcal{I}) = \min\{\kappa \colon \mathcal{I} = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{I}_\alpha, \forall\alpha\ \mathcal{I}_\alpha \text{ jest } \sigma-\text{ideałem i } \forall\alpha < \beta < \kappa\ \ \mathcal{I}_\alpha \subsetneq \mathcal{I}_\beta \subsetneq \mathcal{I}\}$$

oraz zadania pytania, czy $\mathrm{add}(\mathcal{I}) = \mathrm{cofin}(\mathcal{I})$ dla σ-ideałów nie zawierających singletonów. Problem ten rozwiązali Rosłanowski i Shelah w [RS14] podając przykład σ-ideału $\mathcal{J}$ z bazą typu F_σ oraz dość skomplikowanego porządku, który forsuje, że $\mathrm{cofin}(\mathcal{J}) = \omega_1 < \mathrm{add}(\mathcal{J}) = \omega_2$ ([RS14, Twierdzenie 3.12]).

Literatura

[APR13] Antonio Avilés, Grzegorz Plebanek, and Jose Rodríguez. On Baire measurability in spaces of continuous functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 398(1):230–238, 2013.

[Bel80] Murray Bell. Compact ccc nonseparable spaces of small weight. In *The Proceedings of the 1980 Topology Conference (Univ. Alabama, Birmingham, Ala., 1980)*, volume 5, pages 11–25 (1981), 1980.

[Bel96] Murray Bell. A compact ccc non-separable space from a Hausdorff gap and Martin's axiom. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 37(3):589–594, 1996.

[Bla10] Andreas Blass. Combinatorial cardinal characteristics of the continuum. In *Handbook of set theory. Vols. 1, 2, 3*, pages 395–489. Springer, Dordrecht, 2010.

[BN07] Piotr Borodulin-Nadzieja. Measures on minimally generated Boolean algebras. *Topology Appl.*, 154(18):3107–3124, 2007.

[BNC15] Piotr Borodulin-Nadzieja and David Chodounský. Hausdorff gaps and towers in $P(\omega)/\mathrm{Fin}$. *Fund. Math.*, 229(3):197–229, 2015.

[BNF12] Piotr Borodulin-Nadzieja and Barnabás Farkas. Cardinal coefficients associated to certain orders on ideals. *Arch. Math. Logic*, 51(1-2):187–202, 2012.

[BNFP15] Piotr Borodulin-Nadzieja, Barnabás Farkas, and Grzegorz Plebanek. Representations of ideals in Polish groups and in Banach spaces. *J. Symb. Log.*, 80(4):1268–1289, 2015.

[BNG11] Piotr Borodulin-Nadzieja and Szymon Glab. Ideals with bases of unbounded Borel complexity. *MLQ Math. Log. Q.*, 57(6):582–590, 2011.

[BNP10] Piotr Borodulin-Nadzieja and Grzegorz Plebanek. On sequential properties of Banach spaces, spaces of measures and densities. *Czechoslovak Math. J.*, 60(135)(2):381–399, 2010.

[BNS12] Piotr Borodulin-Nadzieja and Omar Selim. Sequential closure in the space of measures. *Topology Appl.*, 159(17):3624–3637, 2012.

[BNZ17] Piotr Borodulin-Nadizeja and Tomasz Źuchowski. On non-separable growths of ω supporting measures. *Proceedings of American Mathematical Society*, to appear, 2017.

[CP86] Jacek Cichoń and Janusz Pawlikowski. On ideals of subsets of the plane and on Cohen reals. *J. Symbolic Logic*, 51(3):560–569, 1986.

[DH00] Alan Dow and Klaas Pieter Hart. The measure algebra does not always embed. *Fund. Math.*, 163(2):163–176, 2000.

[Dob04] Natasha Dobrinen. Complete embeddings of the Cohen algebra into three families of c.c.c., non-measurable Boolean algebras. *Pacific J. Math.*, 214(2):223–244, 2004.

[DP08] Mirna Džamonja and Grzegorz Plebanek. Strictly positive measures on Boolean algebras. *J. Symbolic Logic*, 73(4):1416–1432, 2008.

[DP15] Piotr Drygier and Grzegorz Plebanek. Nonseparable growth of the integers supporting a measure. *Topology Appl.*, 191:58–64, 2015.

[DP16] Piotr Drygier and Grzegorz Plebanek. Complementability of c_0 in the class of continuous functions on compact sets. *arXiv preprint, arXiv: 1601.03770*, 2016.

[DT11] Natasha Dobrinen and Stevo Todorcevic. Tukey types of ultrafilters. *Illinois J. Math.*, 55(3):907–951 (2013), 2011.

[Fre97] David H. Fremlin. On compact spaces carrying Radon measures of uncountable Maharam type. *Fund. Math.*, 154(3):295–304, 1997.

[Fre04] David H. Fremlin. Maharam algebras. *Unpublished notes*, 2004.

[Hir08] James Hirschorn. On the strength of Hausdorff's gap condition. *preprint*, 2008.

[JS90] Haim Judah and Saharon Shelah. The Kunen-Miller chart (Lebesgue measure, the Baire property, Laver reals and preservation theorems for forcing). *J. Symbolic Logic*, 55(3):909–927, 1990.

[Juh71] Istvan Juhász. *Cardinal functions in topology*. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1971. In collaboration with A. Verbeek and N. S. Kroonenberg, Mathematical Centre Tracts, No. 34.

[Kam89] Anastasis Kamburelis. Iterations of Boolean algebras with measure. *Arch. Math. Logic*, 29(1):21–28, 1989.

[Kel59] John L. Kelley. Measures on Boolean algebras. *Pacific J. Math.*, 9:1165–1177, 1959.

[KvM95] Kenneth Kunen and Jan van Mill. Measures on Corson compact spaces. *Fund. Math.*, 147(1):61–72, 1995.

[LT17] Fulgencio Lopez and Stevo Todorcevic. Trees and gaps from a construction scheme. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 145(2):871–879, 2017.

[Mau82] R. Daniel Mauldin, editor. *The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Cafe*. Birkhauser, 1982.

[Moo99] Justin Moore. A linearly fibered Souslinean space under MA. In *Proceedings of the 1999 Topology and Dynamics Conference (Salt Lake City, UT)*, volume 24, pages 233–247, 1999.

[RS14] Andrzej Rosłanowski and Saharon Shelah. Around cofin. *Colloq. Math.*, 134(2):211–225, 2014.

[RT14] Dilip Raghavan and Stevo Todorcevic. Combinatorial dichotomies and cardinal invariants. *Math. Res. Lett.*, 21(2):379–401, 2014.

[Sch93] Marion Scheepers. Gaps in ω^ω. In *Set theory of the reals (Ramat Gan, 1991)*, volume 6 of *Israel Math. Conf. Proc.*, pages 439–561. Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1993.

[Tal84] Michel Talagrand. Pettis integral and measure theory. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 51(307):ix+224, 1984.

[Tka91] Michael G. Tkachenko. P-approximable compact spaces. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 32(3):583–595, 1991.

[Tod00] Stevo Todorčević. Chain-condition methods in topology. *Topology Appl.*, 101(1):45–82, 2000.

[vM82] Jan van Mill. Weak P-points in Čech-Stone compactifications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 273(2):657–678, 1982.

Piotr Borodulin-Nadzieja