Zielona Góra, 6 maja 2016

prof. dr hab. Andrzej Cegielski
Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii
Uniwersytet Zielonogórski

Recenzja rozprawy doktorskiej pana mgr. Przemysława Gospodarczyka Obniżanie stopnia i scalanie krzywych Béziera

Krzywe Béziera zostały wprowadzone w latach 60. niezależnie przez Pierre'a Béziera i Paula de Casteljau w czasie, gdy pracowali we francuskim przemyśle samochodowym. Od tego czasu krzywe te stały się ważnym narzędziem w projektowaniu inżynierskim, przede wszystkim w grafice komputerowej. Są to krzywe parametryczne w przestrzeni $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ zapisane w postaci kombinacji liniowej n wielomianów Bernsteina stopnia n, a współczynnikami w tej kombinacji są współrzędne tzw. punktów kontrolnych. Poprzez manipulacje tymi punktami otrzymuje się krzywe Béziera o pożądanych własnościach. Z praktycznego punktu widzenia ważne jest, aby liczba tych punktów kontrolnych nie była za duża. Dlatego w ostatnich latach wiele prac jest poświęconych obniżaniu stopnia krzywych Béziera w taki sposób, aby powstałe w ten sposób krzywe przybliżały krzywe oryginalne. Z kolei w innych pracach bada się tzw. sklejane krzywe Béziera. Składają się one z fragmentów, które są krzywymi Béziera, przy czym zakłada się odpowiednią gładkość w punktach sklejenia. W jeszcze innych pracach zastępuje się sklejaną krzywą Béziera inną krzywą Béziera, która ma przybliżać krzywą sklejaną. Z grubsza rzecz ujmując problemy tego typu są punktem wyjścia w przedstawionej rozprawie. Jako miarę bliskości krzywych autor przyjmuje tzw. ważony błąd średniokwadratowy, czyli po prostu odległość w odpowiedniej przestrzeni L_2.

W rozdziale 1. autor wprowadza pojęcia i ich własności używane w dalszej części rozprawy, w szczególności tzw. parametryczne i geometryczne warunki ciągłości dotyczące zarówno klasycznych jak i scalanych krzywych Béziera. Rozdział 2. poświęcony jest warunkom ciągłości klasycznych krzywych Béziera. W rozdziale 3., po przedstawieniu własności baz dualnych, autor przedstawia metody ich konstrukcji, a następnie stosuje je do dualnych baz Bernsteina. Rozdziały 4.-8. stanowią zasadniczą część rozprawy. W rozdziale 4. autor szczegółowo przedstawia metodę obniżenia stopnia krzywych Béziera prowadzącą do minimalizacji ważonego błędu średniokwadratowego przy założeniu, że k początkowych i l krańcowych punktów kontrolnych pozostaje bez zmiany. Założenie to jest powiązane z parametrycznymi i geometrycznymi warunkami ciągłości. W rozdziale 5. autor zajmuje się zagadnieniem podobnym do rozpatrywanego w rozdziale 4., ale wprowadza dodatkowo tzw. ograniczenia kostkowe na punkty kontrolne. Założenie to jest ważne z praktycznego punktu widzenia i ma uniemożliwić znaczne oddalenie punktów kontrolnych od krzywej Béziera. W celu rozwiązania tego zagadnienia autor proponuje kilka różnych metod optymalizacyjnych, w tym również metodę opartą o własności dualnych baz Bernsteina. W rozdziałach 6. i 7. autor zajmuje się problemem scalania krzywych Béziera przy założeniu odpowiedniej gładkości parametrycznej lub geometrycznej w punktach sklejenia. Na koniec w rozdziale 8. autor dokłada dodatkowo ograniczenia kostkowe na punkty kontrolne. W zasadniczych rozdziałach pracy część teoretyczna jest uzupełniona odpowiednimi algorytmami, przy czym autor zadbał o to, aby uzyskać algorytmy o niskiej złożoności obliczeniowej. Ponadto praca zawiera liczne przykłady numeryczne potwierdzające zalety proponowanych metod. Do rozprawy jest dołączony indeks haseł, który ułatwia jej czytanie.

Rozprawa jest efektem badań powstałych we współpracy z profesorem Stanisławem Lewanowiczem i doktorem habilitowanym Pawłem Woźnym, których wyniki są zawarte w pięciu artykułach. Cztery z nich są współautorskie oraz jeden jest samodzielny. Ponadto, wyniki badań przedstawione w rozdziale

7. są dodatkowym samodzielnym wkładem autora i nie były wcześniej publikowane. Na podstawie lektury rozprawy mogę potwierdzić, że jej autor wykazał się dobrą znajomością przedmiotu prowadzonych badań oraz dużą kulturą matematyczną i dobrą umiejętnością przełożenia wyników teoretycznych na wyniki numeryczne umieszczone w licznych przykładach. Wyprowadzanie wzorów użytych przez autora wymagało niezwykłej staranności, gdyż każdy ewentualny nawet drobny błąd mógłby mieć negatywny wpływ na wyniki obliczeń numerycznych. Cieszy to, że autor sprostał temu zadaniu. Mimo skomplikowanych przekształceń, raczej trudnych do dokładnego sprawdzenia, pracę czyta się z przyjemnością. Z punktu widzenia złożoności obliczeniowej ważnym jest użycie w pracy baz dualnych do aproksymacji. Pozwalają one bowiem na zaproponowanie metod o znacznie niższej złożoności obliczeniowej, niż inne znane metody stosowane do rozpatrywanych zagadnień. Jednym z dodatkowych walorów pracy jest to, że została napisana w języku angielskim, czyli może być od razu czytana przez zagranicznych badaczy. Pod względem redakcyjnym praca jest bez zarzutu, co ostatnio niezbyt często mi się zdarzało czytając prace doktorskie. Kilka krytycznych uwag umieszczonych poniżej nie zmienia mojej oceny pracy, którą oceniam jako bardzo dobrą. Wnoszę jednocześnie o dopuszczenie autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

1. **Najważniejsze szczegółowe uwagi merytoryczne**

   (a) Strony 4.-5. Powoływanie się we własnościach 3. i 9. na książkę [33] jest raczej niepotrzebne, gdyż własności te wynikają bezpośrednio z twierdzenia dwumianowego oraz z trójkąta Pascala. Również we własności 5., zamiast powoływać się na literaturę napisałbym raczej, że podany wzór wynika bezpośrednio z definicji. Natomiast własność 10. nie jest natychmiastowa i w jej dowodzie trzeba wykazać się trochę sprytem w operowaniu indeksami sumacyjnymi.

   (b) Strona 13., wiersz 11. od dołu (i dalsza część pracy). Wydaje się, że błąd aproksymacji należałoby odnieść do skali rozważanej krzywej Béziera, tym bardziej że w dalszej części rozprawy autor używa błędu aproksymacji dla krzywych w znacznie odbiegającym od tego przykładu zakresie zmienności. Jeśli są przesłanki, aby używać błędu bezwzględnego, autor powinien to gdzieś skomentować.

   (c) Strony 17.-18., problemy 1.8 i 1.9. W sformułowaniu tych problemów nie powinno mieć znaczenia, że P i R są krzywymi Béziera w podanej postaci, ponieważ wielomiany Bernsteina stopnia n stanowią bazę w przestrzeni wielomianów stopnia co najwyżej n. Tak więc, dla większej elegancji, cały problem można by sformułować bez odwoływania się do wielomianów Bernsteina, a na dobra sprawę nawet bez używania wielomianów. Wystarczyłaby przestrzeń funkcyjna i jej domknięta podprzestrzeń. Oczywiście, nie przeszkadza to użyciu konkretnej przestrzeni funkcyjnej przy rozwiązywaniu problemu, na przykład wielomianów stopnia n, i konkretnej bazy, na przykład wielomianów Bernsteina, co zresztą autor uczynił w dalszej części rozprawy.

   (d) Strony 17.-18., problemy 1.8 i 1.9. Jest pewien problem w użyciu wzorów na błąd średniokwadratowy w częściach (i) sformułowań tych problemów. Dość naturalnym wydaje się postulat, aby błąd ten wyniósł 0 jeśli P i R opisują tę samą krzywą. Tak jednak nie jest w przyjętym przez autora sformułowaniu. Wystarczy wziąć dla uproszczenia $d = 2$, $\alpha = \beta = 0$, $n = 4$, $m = 2$, $k = l = 0$ oraz $P(t) = (t^2, t^4)$ i $R(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$. Geometrycznie funkcje te opisują tę samą krzywą. Natomiast najmniejszy błąd średniokwadratowy otrzymuje się dla krzywej $R^*(t) = (t^2, \frac{25}{14}t^2 - \frac{11}{14}t)$ różniącej się od R. Ta niekorzystna własność wymaga komentarza ze strony autora.

   (e) Strona 63., wiersze 8.-7. od dołu. Podane założenia dotyczące nieujemnej określoności macierzy Q oraz domkniętości zbioru rozwiązań dopuszczalnych są na wyrost. Oczywiście zbiór zdefiniowany przez (5.11) jest domknięty. W tej sytuacji wystarczy się powołać na twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów funkcji ciągłej określonej na zbiorze zwartym.

2. **Dalsze uwagi merytoryczne**

   (a) Strony 17.-18. W problemach 1.8 i 1.9, w punkcie (ii) napisałbym raczej: P and Q agree (parametrically or geometrically) up to order (k, l) at the endpoints.

   (b) Strony 28.-29. Powoływanie się w faktach 3.1 i 3.2 na pozycję [100] jest niewłaściwe, ponieważ fakty te były znane wcześniej.

   (c) Strona 52., wiersz 6. od dołu. Powinno być: k and l less than 3.

   (d) Strona 53., wiersz 14. Wielkości $\lambda_1, ..., \lambda_k, \mu_1, ..., \mu_l$ nie zostały podane.

   (e) Strona 53., wiersz 2. od dołu: Należałoby uzasadnić dlaczego podane wielkości dla α i β są naturalnym wyborem.

   (f) Strona 58., wiersz 4. od dołu. Wydaje się, że m jest tutaj z góry ustaloną liczbą i należałoby zaraz po wzorze na $P(t)$ napisać: and $m < n$. Z podanej postaci problemu 5.1 wynika bowiem, że poszukujemy krzywej Béziera wśród wszystkich krzywych stopni $m < n$, a chyba nie o to chodziło autorowi.

   (g) Strona 58., wiersz 1. od dołu. Na stronie 19. autor pisze, że w rozprawie będzie używał normy L_2. Powinien więc w tym miejscu uzasadnić, dlaczego w przedstawionym problemie zdecydował się na normę l_2.

   (h) Strona 59., 3. wiersz od dołu w uwadze 5.3. Nie bardzo wiem, jak autor chciałby szybko sprawdzić, że krzywa i powierzchnia nie przecinają się.

   (i) Strona 59., wiersze 11.-10. od dołu. Nie sądzę, aby autorowi chodziło o to, że podany zbiór jest większy w sensie zawierania.

   (j) Strona 81., wiersz 6. od dołu. Należałoby dopisać $q = 1, 2, ..., s-1$. Ponadto dla przejrzystości można byłoby napisać, że krzywą podzielono na s mniejszych krzywych o równych długościach.

3. **Literówki**

   (a) Strona 7., wiersz 1. od dołu. Powinno być $r = 1, 2, ..., n$.

   (b) Strona 8., wiersz 6. od dołu. Dolna i górna granica sumowania nie zgadzają się z [33, (5.3)] (używam tutaj numeracji z 4. wydania tej książki z roku 1997).

   (c) Strony 16.-17. Chodzi zapewne o rysunek 9., a nie 7 lub 8(c).

   (d) Strona 88., wiersz 10. Powinno być is zamiast in.

   (e) Strona 106. W pozycji [72] numer woluminu powinien być 278 zamiast 78.

4. **Uwagi redakcyjne**

   (a) Strony 31. i 33. We wnioskach 3.5 i 3.10 oddzieliłbym treści wniosków od uzasadnienia i zastosowałbym używany tradycyjnie styl taki jak w twierdzeniach.

   (b) Strona 51., wiersz 3. Użyłbym tradycyjnego i bardziej czytelnego zapisu $c := \{(\lambda_1, \mu_1) : \lambda_1 \geq z_0, \mu_1 \geq z_1\}$ i poprawiłbym odpowiednio zapisy w kolejnych dwóch wierszach.