

Prof. dr hab. Leszek Plaskota
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa

Ocena rozprawy doktorskiej
pt.: *Obniżanie stopnia i scalanie krzywych Béziera*
(ang. *Degree reduction and merging of Bézier curves*)
mgr. PRZEMYSŁAWA GOSPODARCZYKA

1. ROZPRAWA

Rozprawa doktorska mgr. P. GOSPODARCZYKA, napisana w języku angielskim, mieści się w tematyce projektowania wspomaganego komputerowo (ang: *Computer-Aided Design - CAD*). Rozpatrywane są dwa ważne problemy matematycznego modelowania krzywych przy pomocy krzywych Béziera:

- obniżanie stopnia krzywych Béziera, oraz
- scalanie krzywych Béziera.

W obu przypadkach przyjmowane są pewne naturalne ograniczenia polegające głównie na tym, że otrzymane nowe krzywe powinny spełniać pewne warunki ciągłości na ich końcach. Poszukuje się algorytmów optymalnych, które produkują krzywe minimalizujące określony funkcjonal odległości od oryginalnych krzywych oraz mają stosunkowo niski koszt obliczeniowy.

Oba problemy, oprócz tego, że są nietrywialnym wyzwaniem teoretycznym, są bardzo dobrze umotywowane praktycznymi zastosowaniami, o czym doktorant przekonująco pisze w rozdziale wstępnym (*1. Introduction*). Rozdział ten jest również dobrym wstępem do problematyki. Zawiera podstawowe informacje o używanych narzędziach modelowania krzywych, czyli o wielomianach Bernsteina i krzywych Béziera, oraz definiuje problemy redukcji stopnia oraz scalania krzywych. W końcu, przedstawiona jest w skrócie zawartość całej pracy.

Następny rozdział (*2. Continuity constraints*) skupia się na rodzajach ograniczeń nakładanych na krzywe. Są to warunki ciągłości typu parametrycznego, geometrycznego, a także warunki mieszane.

Rozdział *3. Dual bases* zawiera podstawowe informacje oraz wyniki teoretyczne dotyczące baz dualnych. Jest to o tyle ważne, że bazy dualne są wykorzystywane w późniejszych rozdziałach do konstrukcji algorytmów rozwiązujących postawione problemy. Pokazane są, m.in., efektywne algorytmy przejścia od 'mniejszej' bazy dualnej do 'większej' bazy dualnej i odwrotnie, a także analizowany jest szczególny przypadek

bazy dualnej do bazy wielomianów Bernsteina. Wyniki tu prezentowane, będące efektem wspólnej pracy doktoranta z P. Woźnym, są ważne z punktu widzenia następnych rozdziałów, ale mają też samodzielne znaczenie.

W tym miejscu zaczyna się zasadnicza część rozprawy, w której prezentowane są już opublikowane wyniki autorskie lub współautorskie. Rozdziały 4-5 dotyczą problemu redukcji stopni, a pozostałe rozdziały 5-7 scalania krzywych Béziera.

Rozdział 4. G_k^l -constrained degree reduction of Bézier curves oparty jest zasadniczo na wynikach ze współautorskiej pracy doktoranta z S. Lewanowiczem i P. Woźnym. Skonstruowano algorytm optymalnego obniżania stopnia krzywej Béziera ze stopnia n do stopnia $m < n$ przy założeniu warunków ciągłości geometrycznej i optymalizacji ważonej odległości średniokwadratowej. Istotną rolę w zastosowanej metodzie odgrywają tu dualne wielomiany Bernsteina. Algorytm ma rekordowo niską złożoność $O(mn)$ spośród dotychczas znanych. Poza tym, w przeciwieństwie do poprzednich prac, autorzy potrafią rozwiązać problem we wszystkich praktycznie interesujących przypadkach rzędów ciągłości geometrycznej, charakteryzowanych parametrami k i l . Rozdział uzupełniają przekonujące, konkretne przykłady numeryczne, w których, m.in., porównano jakość wyników w zależności od wartości parametrów problemu. Należy jeszcze dodać, że warunki ciągłości parametrycznej nie są tu analizowane. Problem ten został wcześniej rozwiązany przez współautorów mgr. Gospodarczyka, a niektóre idee tam zawarte wykorzystane w tym rozdziale.

Rozdział 5. Degree reduction of planar Bézier curves with box constraints jest kontynuacją problem obniżania stopnia, ale tym razem przy założeniu ciągłości parametrycznej i dodatkowym ograniczeniu o lokalizacji punktów kontrolnych poszukiwanej krzywej Béziera. Rozdział ten w znacznej części bazuje na już opublikowanej samodzielnej pracy doktoranta, ale także na innej, wspólnej pracy z P. Woźnym. Autor zauważa, że problem redukcji z ograniczeniami obszaru zmienności punktów kontrolnych zasadniczo sprowadza się do rozwiązania zadania optymalizacji kwadratowej z macierzą symetryczną i nieujemnie określoną. Aby rozwiązać to zadanie, proponowany jest odpowiednio dostosowany do bieżących potrzeb iteracyjny algorytm BVLS autorstwa P. B. Starka i R. I. Parkera. W każdym kroku iteracyjnym powstaje podproblem optymalizacyjny, do rozwiązania którego wykorzystuje się bazy dualne i ich własności zaprezentowane wcześniej w rozdziale 3. Jak poprzednio, rozdział uzupełniają dobrze dobrane przykłady numeryczne.

Pozostałe trzy rozdziały poświęcone są scalaniu krzywych Béziera, przy czym liczba s scalanych krzywych może być w zasadzie dowolna, a stopień m wynikowej krzywej jest nie mniejszy od maksymalnego stopnia krzywych 'składowych'. W przeciwieństwie do obniżania stopnia, autor rozpatruje tutaj również scalanie przy ograniczeniach typu parametrycznego w rozdziale 6. $C^{k,l}$ -constrained merging of Bézier curves. Zawarte tu wyniki pochodzą ze wspólnej pracy doktoranta, S. Lewanowicza i P. Woźnego. Wykorzystując, podobnie jak we wcześniejszych rozdziałach, dualne wielomiany Bernsteina, pokazano algorytm minimalizujący odległość średniokwadratową o rekordowym koszcie proporcjonalnym do sm^2 . Wartościową cechą algorytmu jest to, że optymalizacja scalania odbywa się globalnie, a nie przez scalanie kolejnych dwóch krzywych.

Z kolei w rozdziale 7. $G^{k,l}$ -constrained merging of Bézier curves konstruowany jest podobny algorytm dla ograniczeń typu geometrycznego, który ma również najniższy

koszt spośród dotychczas istniejących algorytmów. Rozdział ten jest samodzielnym, jeszcze nie publikowanym, dokonaniem doktoranta.

Ostatni rozdział 8. *Merging of planar Bézier curves with box constraints* jest odpowiednikiem rozdziału 5. dla ograniczeń geometrycznych, tzn. nakłada się dodatkowe ograniczenie na umiejscowienie punktów kontrolnych krzywej scalonej. Minimalizacja odbywa się w normie L_2 . Rozdział powstał na podstawie wspólnego artykułu z P. Woźnym. Tak jak wszystkie pozostałe rozdziały, ten również zawiera ciekawe wyniki numeryczne.

2. UWAGI

Rozprawa doktorska mgr. GOSPODARCZYKA zawiera wiele interesujących wyników, które główne polegają na daleko nietrywialnych konstrukcjach efektywnych algorytmów rozwiązujących praktyczne problemy obniżania stopnia i scalania krzywych Béziera. Algorytmy te wymagały wielu wcześniejszych prac koncepcyjnych i właściwego poruszania się w gąszczu skomplikowanym formuł przy wyprowadzaniu końcowych wzorów. Na uwagę zasługuje z pewnością nowatorskie zastosowanie baz dualnych. W kilku przypadkach skonstruowane algorytmy nie tylko rozwiązują postawione problemy w sposób optymalny, ale też mają rekordowo nisko koszt.

Większość prezentowanych wyników ma charakter współautorski. Zgodne oświadczenia współautorów pokazują, że wkład doktoranta był bardzo istotny. Do niego należały również implementacja otrzymanych algorytmów oraz przeprowadzenie testów numerycznych. Prezentowane wyniki zostały już opublikowane w czterech pracach (w tym jednej samodzielnej) w cenionych czasopismach: *Computer-Aided Design*, *Applied Mathematics and Computation*, *Numerical Algorithms*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, a dwie inne są wysłane do publikacji. Można mieć nadzieję, że nowatorskie algorytmy znajdą uznanie w przyszłości i będą stosowane w praktyce.

Należy dodać, że rozprawa jest bardzo ładnie zredagowana, z przejrzystym podziałem na rozdziały odpowiadające poszczególnym tematom. Posiada też bogatą bibliografię, składającą się ze 115 pozycji, oraz zawsze pomocny indeks. Moja drobna uwaga krytyczna dotyczy sposobu stawiania problemów redukcji stopnia i scalania krzywych. Dla przykładu, w sformułowaniu Problemu 1.8 na stronie 17 warunki (i) oraz (ii) są odseparowane (nie jest jasne po jakim zbiorze krzywych minimalizujemy), co sprawia pewną trudność w natychmiasowym zrozumieniu. W istocie jednak (ii) jest ważny w procesie optymalizacji (i). Właściwsza byłaby więc następująca konstrukcja: "For a given Bézier curve P find a Bézier curve R that minimizes under the condition" Poza tym dostrzegłem jedynie kilka "literówek". (s. 36, -14: 'computed' zamiast 'completed'; s. 53, -4: 'provides an application' zamiast 'provides of the application'; s. 66, -14: 'we described' zamiast 'we describe'.)

3. KONKLUZJA

Podsumowując uważam, że przedstawiona rozprawa spełnia, a nawet przewyższa, ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie mgr. PRZEMYSŁAWA GOSPODARCZYKA do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Co więcej, uważam, że należałoby rozważyć wyróżnienie rozprawy.

