

# CNF Encodings of Cardinality Constraints Based on Comparator Networks

## Streszczenie

Problem spełnialności formuł boolowskich (SAT) jest jednym z fundamentalnych problemów informatyki. Jako jeden z głównych problemów NP-zupełnych może być używany - poprzez znane redukcje - do reprezentowania instancji wielu innych trudnych problemów decyzyjnych. Dodatkowo, takie reprezentacje mogą być wprowadzone do jednego z dostępnych programów znajdujących spełniające wartościowanie formuły boolowskiej, na przykład do programu MiniSat. Takie programy (zwane SAT-solverami) są intensywnie rozwijane od wielu lat i, mimo swojej wykładniczej pesymistycznej złożoności, są w stanie rozwiązać wiele skomplikowanych instancji praktycznych problemów. Wadą tego podejścia jest to, że formuły boolowskie nie są ani ekspresywne, ani zwarte, więc używanie ich do opisu problemów decyzyjnych może samo w sobie stanowić duże wyzwanie.

Tę trudność można pokonać poprzez użycie wysoko-poziomowych więzów, jako łącznika pomiędzy oryginalnym problemem a SAT-em, które następnie są automatycznie przekształcane w równoważne formuły. Głównym celem tej pracy jest analiza metod translacji dla jednej z kategorii takich więzów, a mianowicie dla "boolowskich więzów ilościowych" (lub po prostu - więzów ilościowych). Więzy ilościowe wymagają, aby co najwyżej (co najmniej lub dokładnie)  $k$  z  $n$  literałów boolowskich było prawdziwych. Pojawiają się one w naturalny sposób w opisach różnych problemów świata rzeczywistego, np. szeregowaniu, tworzeniu rozkładów jazdy lub formalnej weryfikacji hardware-u.

Celem tej pracy jest analiza i opracowanie nowych efektywnych sposobów na kodowanie (translację) więzów ilościowych do równoważnych im formuł boolowskich w postaci CNF tak, aby otrzymane instancje problemu SAT były jak najmniejsze i czas działania SAT-solvera był jak najkrótszy. Głównym wynikiem tej pracy jest opracowanie i analiza kilku efektywnych algorytmów translacji, które poprawiają najnowsze wyniki w dziedzinie kodowania więzów ilościowych. Zaprezentowane algorytmy bazują na sieciach komparatorów, które już wcześniej były używane przez inne algorytmy kodowania takich więzów i dla których eksperymenty potwierdzały ich efektywność. Nasze konstrukcje pozwalają wygenerować lepsze kodowania w porównaniu do wcześniej publikowanych metod, zarówno w sensie teoretycznym jak i praktycznym. W szczególności, korzystają one z tzw. uogólnionych komparatorów, które można efektywnie kodować w postaci formuł CNF. Ponadto udowodniliśmy, że każde kodowanie oparte na uogólnionych sieciach komparatorów zachowuje tzw. "arc-consistency" - teoretyczną własność, która gwarantuje lepszą propagację wartości podczas obliczeń SAT-solvera.

Dodatkowo badamy możliwość wykorzystania naszych algorytmów w kodowaniu bardziej ogólnej klasy więzów - pseudo-boolowskich, gdzie każdy z więzów ogranicza wartość kombinacji liniowej literałów boolowskich z całkowitymi współczynnikami. W tym celu zaimplementowaliśmy PB-solver bazujący na znanym solverze MiniSat+ i eksperymenty pokazały, że na wielu instancjach popularnych zestawów testowych nasze techniki kodowania przewyższają inne obecnie stosowane w PB-solverach.