Abstract

In this thesis we continue the study of approximation algorithms for problems revolving around network design and facility location. Our primary focus are node-weighted variants of the Steiner tree problem restricted to planar graphs. We give new and improved approximation algorithms that provide provably good solutions. Our main results are as follows:

1. We start by showing a primal-dual algorithm for the NODE-WEIGHTED PRIZE-COLLECTING STEINER TREE problem on planar graphs that achieves an approximation factor of 3 and has a so-called Lagrangian-multiplier-preserving (LMP) property.

2. Next, we study the problem of finding a minimum weight connected subgraph spanning at least k vertices on planar, node-weighted graphs. We give a $(4+\varepsilon)$-approximation algorithm for this problem leveraging the above LMP property.

3. Finally, we show a PTAS for NODE-WEIGHTED STEINER TREE on planar graphs in a special, map-weighted case. As a corollary, we obtain a PTAS for Steiner Tree on uniform map graphs, which substantially generalize edge-weighted planar graphs as they allow arbitrarily large cliques.

The two first results rely on methods originating from linear programming, e.g., primal-dual and Lagrangian relaxation. Here, we make use of planarity solely via Euler's formula. On the other hand, our PTAS result heavily exploits planarity, extending the brick decomposition and spanner construction technique of Borradaile et al. [12]. In the process, we prove and use a node-weighted variant of contraction

decomposition theorem.

As a secondary inquiry, we undertake some variants of a facility location problem. We introduce the NONDECREASING CONCAVE CONNECTION COST FACILITY LOCATION problem and show its connection to the FACILITY LOCATION WITH PENALTIES problem. Then, we give a 1.488 approximation algorithm for both problems that closes the current gap between classical facility location and previous best approximation for FACILITY LOCATION WITH PENALTIES. Finally, we give vastly improved approximation algorithms for STAR INVENTORY ROUTING PROBLEM WITH FACILITY LOCATION problems in uncapacitated, capacitated splittable and capacitated unsplittable scenarios.

Streszczenie

W tej rozprawie kontynuujemy badania nad algorytmami aproksymacyjnymi dla problemów dotyczących projektowaniu sieci i lokalizacji fabryk. Naszym głównym obiektem studiów są wierzchołkowo-ważone warianty problemu drzewa Steinera ograniczone do grafów planarnych. Uzyskujemy nowe i ulepszone algorytmy aproksymacyjne, które zapewniają dowodliwie dobre rozwiązania. Nasze główne rezultaty są następujące:

1. Zaczynamy od pokazania prymalno-dualnego algorytmu dla problemu NODE-WEIGHTED PRIZE-COLLECTING STEINER TREE na grafach planarnych, który uzyskuje współczynnik aproksymacji 3 oraz posiada właściwość zachowywania mnożnika Lagrange'a (LMP).

2. Następnie, studiujemy problem znajdowania spójnego podgrafu rozpinającego co najmniej k wierzchołków na planarnym, wierzchołkowo-wązonym grafie o minimalnym koszcie. Dla tego problemu dajemy algorytm $4+\varepsilon$-aproksymacyjny wykorzystując powyższą właściwość LMP.

3. Na koniec, pokazujemy PTAS dla problemu NODE-WEIGHTED STEINER TREE na grafach planarnych, w szczególnym, mapowo-ważonym przypadku. W następstwie, uzyskujemy PTAS dla drzewa Steinera na jednolicie-ważonych grafach mapowych, które istotnie uogólniają krawędziowo-ważone planarne grafy, gdyż pozwalają one na dowolnie duże kliki.

Pierwsze dwa wyniki używają metod pochodzących z programowania liniowego, na przykład, metody prymalno-dualnej i relaksacji Lagrange'a. Z planarności korzys-

tamy tu wyłącznie poprzez wzór Eulera. Z drugiej strony, zaproponowany przez nas schemat aproksymacji (PTAS) mocno wykorzystuje planarność, rozszerzając technikę dekompozycji cegiełkowej i konstrukcji spannera opisaną przez Borradaile i innych autorów [12]. Dodatkowo dowodzimy i używamy wierzchołko-ważonego wariantu twierdzenia o dekompozycji grafu przy pomocy ściągania krawędzi.

W dodatkowym badaniu, podejmujemy niektóre warianty problemu lokalizacji fabryk. Wprowadzamy problem NONDECREASING CONCAVE CONNECTION COST FACILITY LOCATION i pokazujemy jego powiązanie z problemem FACILITY LOCATION WITH PENALTIES. Następnie, dajemy algorytm 1.488-aproksymacyjny dla obydwu problemów, który zamyka bieżącą lukę pomiędzy klasycznym problem lokalizacji fabryk, a problemem lokalizacji fabryk z karami. Wreszcie, dostarczamy mocno ulepszone algorytmy aproksymacyjne dla problemu STAR INVENTORY ROUTING PROBLEM WITH FACILITY LOCATION w trzech wariantach: nieograniczonym pojemnościowo, podzielnie ograniczonym pojemnościowo oraz niepodzielnie ograniczonym pojemnościowo.