AUTOREFERAT

1. Imię i nazwisko

Mariusz Mirek

2. Dyplomy i stopnie naukowe

- Uniwersytet Wrocławski
  Doktor matematyki, dyplom obroniony z wyróżnieniem w 2011 r.

  Promotor: prof. Ewa Damek
  Tytuł: "Twierdzenia graniczne dla rekursji stochastycznych".

- Uniwersytet Wrocławski
  Magister matematyki teoretycznej, dyplom obroniony w 2007 r.

3. Historia zatrudnienia w jednostkach naukowych

- Uniwersytet Wrocławski
  Stanowisko adiunkta, 01.10.2011-30.09.2018. Obecnie urlopowany.

- University of Bonn, Bonn, Germany
  HCM Postdoctoral research fellowship, 01.10.2012-31.08.2016

  Mentor: prof. Christoph Thiele.

- Institute for Advanced Study, Princeton, USA
  Member 1.09.2016-obecnie

  Mentor: prof. Jean Bourgain.

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki

4.1. **Tytuł osiągnięcia naukowego.**

Dyskretna analiza harmoniczna

4.2. **Prace stanowiące osiągnięcie naukowe.**

[H1] M. Mirek. $\ell^p(\mathbb{Z})$-boundedness of discrete maximal functions along thin subsets of primes and pointwise ergodic theorems. *Mathematische Zeitschrift* **279**, (2015), no. 1–2, 27–59.

[H2] M. Mirek. Roth's Theorem in the Piatetski–Shapiro primes. *Revista Matemática Iberoamericana* **31**, (2015), no. 2, 617–656.

[H3] M. Mirek. Weak type $(1, 1)$ inequalities for discrete rough maximal functions. *Journal d'Analyse Mathematique* **127**, (2015), 303–337.

[H4] M. Mirek and B. Trojan. Cotlar's ergodic theorem along the set of prime numbers. *Journal of Fourier Analysis and Applications* **21**, (2015), no. 4, 822–848.

[H5] M. Mirek and B. Trojan. Discrete maximal functions in higher dimensions and applications to ergodic theory. *American Journal of Mathematics* **138**, (2016), no. 6, 1495–1532.

4.3. **Omówienie celu naukowego wyżej wymienionych prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.** W pierwszych czterech podrozdziałach (4.3.1-4.3.4) omówimy klasyczne i najnowsze wyniki w dyskretnej analizie harmonicznej pokazując ich powiązanie z innymi dziedzinami matematyki; z teorią ergodyczną, analityczną teorią liczb i kombinatoryką addytywną. Będzie to częściowo uzasadniać nasze motywacje do studiowania dyskretnych analogonów w analizie harmonicznej. Ponadto podamy krótki opis metod (mających teorioliczbowy charakter), które doprowadziły do znacznego rozwoju w dyskretnej analizie harmonicznej, i które były niezbędne dla tego projektu; jednocześnie pokazując, że dyskretna analiza harmoniczna jest nadal bardzo obiecującą dziedziną.

W pozostałych pięciu podrozdziałach (4.3.5-4.3.9), których tytuły odpowiadają tytułom **[H1]**, **[H2]**, **[H3]**, **[H4]** i **[H5]** odpowiednio, zaprezentujemy główne rezultaty tej habilitacji.

Zanim przejdziemy do szczegółowego opisu, przedstawimy w skrócie najważniejsze wyniki.

- Niech $\mathbf{P}$ będzie zbiorem liczb pierwszych. W **[H1]** udowodniliśmy pierwsze punktowe twierdzenia ergodyczne dla cienkich podzbiorów liczb pierwszych; podzbiory liczb pierwszych mające gęstość zero w liczbach pierwszych. Takim przykładem jest zbiór liczb pierwszych Piatetskiego–Shapiro $\mathbf{P}_\gamma = \{\lfloor n^{1/\gamma} \rfloor : n \in \mathbb{N}\} \cap \mathbf{P}$ dla pewnego $\gamma < 1$ dostatecznie bliskiego 1. W szczególności, udowodniliśmy, że dla dowolnego układu dynamicznego $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ i każdej funkcji $f \in L^r(X, \mu)$ dla $r > 1$, granica
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{|\mathbf{P}_\gamma \cap [1, N]|} \sum_{p\in\mathbf{P}_\gamma\cap[1,N]} f(T^p x) \text{ istnieje } \mu\text{-prawie wszędzie na } X.$$
Metody okazały się być na tyle ogólne, że udało nam się również rozwiązać trójkowy problem Goldbacha dla pewnych cienkich podzbiorów liczb pierwszych. Odsyłamy do sekcji 4.3.5.
- W **[H2]** rozważaliśmy następujące podzbiory liczb pierwszych $\mathbf{P}_h = \{\lfloor h(n) \rfloor : n \in \mathbb{N}\} \cap \mathbf{P}$, dla pewnych funkcji h jak w Definicji 4.25. Pokazaliśmy, że każdy podzbiór $\mathbf{P}_h$ mający niezerową relatywną górną gęstość zawiera nietrywialne postępy arytmetyczne o długości co najmniej trzy. W szczególności zbiór liczb Piatetskiego–Shapiro $\mathbf{P}_\gamma$ ustalonego typu $71/72 < \gamma < 1$ posiada tę własność. Dla dowodu musieliśmy pokazać odpowiednik nierówności restrykcyjnej Bourgaina–Greena dla zbiorów $\mathbf{P}_h$. Odsyłamy do sekcji 4.3.2.
- W **[H3]** studiowaliśmy, dla $x \in \mathbb{Z}$, funkcje maksymalne
$$\mathcal{M}_h f(x) = \sup_{N\in\mathbb{N}} \frac{1}{|\mathbf{N}_h \cap [1, N]|} \Big| \sum_{n\in\mathbf{N}_h\cap[1,N]} f(x-n) \Big|,$$
zdefiniowane wzdłuż zbiorów $\mathbf{N}_h = \{\lfloor h(n) \rfloor : n \in \mathbb{N}\}$, dla odpowiednich funkcji h jak w Definicji 4.50. Pokazaliśmy, że $\mathcal{M}_h$ jest słabego typu $(1, 1)$, tzn., że istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego $\lambda > 0$ i każdej funkcji $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$, mamy
$$|\{x \in \mathbb{Z} : |\mathcal{M}_h f(x)| > \lambda\}| \leqslant \frac{C}{\lambda} \|f\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}.$$
Jako wniosek dostaliśmy też punktowe twierdzenia ergodyczne dla zbiorów $\mathbf{N}_h$. Odsyłamy do sekcji 4.3.3.
- W **[H4]** udowodniliśmy odpowiednik punktowego twierdzenia ergodycznego Cotlara dla liczb pierwszych. Mianowicie pokazaliśmy, że dla każdego układu dynamicznego $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ z odwracalnym przekształceniem zachowującym miarę T na X, i dla każdej funkcji $f \in L^r(X, \mu)$ przy $r > 1$, granica
$$\lim_{N\to\infty} \sum_{p\in\pm\mathbf{P}\cap[1,N]} \frac{f(T^p x)}{p} \log |p| \text{ istnieje } \mu\text{-prawie wszędzie na } X.$$
Tutaj odsyłamy do sekcji 4.3.4.
- W **[H5]** udowodniliśmy wielowymiarowy odpowiednik punktowego twierdzenia ergodycznego Bourgaina wzdłuż przekształceń wielomianowych. Mianowicie, dla każdej σ-skończonej przestrzeni z miarą $(X, \mathcal{B}, \mu)$ oraz rodziny odwracalnych, komutujących i zachowujących miarę przekształceń $S_1, S_2, \ldots, S_d$ dla $d \in \mathbb{N}$ oraz dla każdej funkcji $f \in L^p(X, \mu)$ przy $p > 1$, granica
$$\lim_{N\to\infty} N^{-k} \sum_{n\in[1,N]^k\cap\mathbb{N}^k} f(S_1^{\mathcal{P}_1(n)} S_2^{\mathcal{P}_2(n)} \cdot \ldots \cdot S_d^{\mathcal{P}_d(n)} x) \text{ istnieje } \mu\text{-prawie wszędzie na } X,$$

gdzie każdy $\mathcal{P}_j$ jest wielomianem całkowitoliczbowym na $\mathbb{Z}^k$. Uzyskaliśmy to dzięki szacowaniom półnorm r-wariacyjnych. Odsyłamy do sekcji 4.3.5.

4.3.1. *Krótka historia.* Dyskretne odpowiedniki[1] funkcji maksymalnych i całek singularnych są obecne w analizie harmonicznej od samego początku. W późnych latach dwudziestych ubiegłego stulecia, Riesz [67] udowodnił (rozszerzając przypadek $p = 2$), że transformata Hilberta

$$\mathcal{H}f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy,$$

jest ograniczona[2] na $L^p(\mathbb{R})$ dla wszystkich $p > 1$ zauważając jednocześnie, że jej ograniczoność implikuje ograniczoność jej dyskretnego odpowiednika

$$\mathcal{H}_{\text{dis}}f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{f(n-m)}{m},$$

na $\ell^p(\mathbb{Z})$ dla wszystkich $p > 1$. Niedługo po tym Hardy i Littlewood [25] udowodnili, że funkcja maksymalna

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{t>0} \left|\frac{1}{t} \int_0^t f(x-y)dy\right|,$$

jest ograniczona na $L^p(\mathbb{R})$ dla wszystkich $1 < p \leqslant \infty$. Wiener [84] rozszerzył ich rezultat do wyższych wymiarów używając lematu pokryciowego Vitaliego. Ograniczoność na $L^p(\mathbb{R})$ funkcji maksymalnej Hardyego–Littlewooda $\mathcal{M}$ implikuje ograniczoność na $\ell^p(\mathbb{Z})$, dla tych samych parametrów, jej dyskretnego odpowiednika

$$\mathcal{M}_{\text{dis}}f(n) = \sup_{N\in\mathbb{N}} \frac{1}{N}\Big|\sum_{m=1}^{N} f(n-m)\Big|.$$

Calderón i Zygmund [12] uogólnili rezultat Riesza do przypadku wielowymiarowego, wprowadzając argument typu stopping-time (powszechnie znany jako rozkład Calderóna–Zygmunda). A dokładniej pokazali, że całki singularne

$$\mathcal{T}f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|y|>\varepsilon} f(x-y)K(y)dy,$$

gdzie K jest jądrem Calderóna–Zygmunda[3] są ograniczone na $L^p(\mathbb{R}^d)$ dla wszystkich $p > 1$ jednocześnie zauważając że ich metoda daje ograniczoność na $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ ich dyskretnych odpowiedników

$$\mathcal{T}_{\text{dis}}f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} f(n-m)K(m).$$

Warto podkreślić, że wszystkie funkcje maksymalne i całki singularne wymienione wyżej są słabego typu $(1,1)$[4].

Ponadto w powyższych przypadkach, dyskretne rezultaty dla funkcji maksymalnych czy operatorów Calderóna–Zygmunda, można wywnioskować poprzez adaptację metod z dowodów dla ich ciągłych odpowiedników, albo odwołując się bezpośrednio do ciągłych wyników. Mianowicie, pokażemy jak porównać

[1]Ta część tekstu jest oparta na wstępie z [65] oraz artykułach [83] i [86].

[2]Niech (X,μ) będzie σ-skończoną przestrzenią z miarą. Mówimy, że operator liniowy $T : L^p(X,\mu) \to L^p(X,\mu)$ jest ograniczony na $L^p(X,\mu)$ dla pewnego $1 \leqslant p \leqslant \infty$, jeśli istnieje stała $C_p > 0$ taka, że $\|T(f)\|_{L^p(X,\mu)} \leqslant C_p\|f\|_{L^p(X,\mu)}$ dla każdego $f \in L^p(X,\mu)$.

[3]Mówimy, że $K \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}\big)$ jest jądrem Calderóna–Zygmunda jeśli dla wszystkich $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ spełnia nierówność

$$|y|^d|K(y)| + |y|^{d+1}|\nabla K(y)| \leqslant 1$$

oraz warunek skracań

$$\sup_{0<\lambda_1<\lambda_2} \Big| \int_{\lambda_1\leqslant|y|\leqslant\lambda_2} K(y)\mathrm{d}y\Big| \leqslant 1.$$

[4]Niech (X,μ) będzie σ-skończoną przestrzenią z miarą. Mówimy, że operator liniowy $T : L^p(X,\mu) \to L^p(X,\mu)$ jest słabego typu (p,p) dla pewnego $1 \leqslant p < \infty$, jeśli istnieje stała $C_p > 0$ taka, że $\|T(f)\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} \leqslant C_p\|f\|_{L^p(X,\mu)}$ dla każdego $f \in L^p(X,\mu)$, gdzie $\|T(f)\|_{L^{p,\infty}(X,\mu)} = \inf\big\{M > 0 : \forall_{\lambda>0}\ \mu(\{x \in X : |T(f)(x)| > \lambda\}) \leqslant M^p\lambda^{-p}\|f\|^p_{L^p(X,\mu)}\big\}$.

dyskretną funkcję maksymalną $\mathcal{M}_{\mathrm{dis}}$ z jej ciągłym odpowiednikiem $\mathcal{M}$. Niech $f \geqslant 0$ na $\mathbb{Z}$ i definiujemy F na $\mathbb{R}$ w następujący sposób

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\mathbf{1}_{(-1/2,1/2]}(x-n).$$

Zauważmy, że $F(n) = f(n)$ dla $n \in \mathbb{Z}$ i $F \in L^p(\mathbb{R})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in \ell^p(\mathbb{Z})$ oraz $\|F\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|f\|_{\ell^p(\mathbb{Z})}$. Dla $x \in (n-1/2, n+1/2]$ można pokazać, że

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(n-m) \leqslant \frac{1}{N}\int_{|x-t|\leqslant N+1} F(t)dt \leqslant \frac{2}{N+1}\int_{|t|\leqslant N+1} F(x-t)dt.$$

Stąd mamy, że $\mathcal{M}_{\mathrm{dis}}f(n) \leqslant 2\mathcal{M}F(x)$ dla każdego $x \in (n-1/2, n+1/2]$. To nam natychmiastowo pozwala wywnioskować ograniczoność na $\ell^p(\mathbb{Z})$ oraz słaby typ $(1,1)$ dla dyskretnej funkcji maksymalnej $\mathcal{M}_{\mathrm{dis}}$ z ograniczoności na $L^p(\mathbb{R})$ oraz słabego typu $(1,1)$ dla funkcji maksymalnej $\mathcal{M}$.

Inną ważną klasą funkcji maksymalnych są maksymalne transformaty Radona

$$\mathcal{M}^{\mathcal{P}}f(x) = \sup_{t>0}\frac{1}{|B_t|}\left|\int_{B_t} f(x-\mathcal{P}(y))dy\right|,$$

modelowane na przekształceniach wielomianowych $\mathcal{P} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ dla pewnych $d, k \in \mathbb{N}$, gdzie B_t jest otwartą kulą w $\mathbb{R}^k$, o środku w 0 i promieniu $t > 0$. A dokładniej, $\mathcal{P}(y) = (\mathcal{P}_1(y), \ldots, \mathcal{P}_d(y))$, gdzie każdy $\mathcal{P}_j(y)$ jest wielomianem rzeczywistym w $\mathbb{R}^k$. Takie funkcje maksymalne są ograniczone na $L^p(\mathbb{R}^d)$ dla $1 < p \leqslant \infty$, więcej szczegółów i referencje znajdują się w [71]. Jeśli $d = k = 1$ i $\mathcal{P}(t) = t^2$, wtedy ograniczoność na $L^p(\mathbb{R})$ oraz słaby typ $(1,1)$ jest dość łatwy do wywnioskowania. Mianowicie, poprzez łatwą zamianę zmiennych, dla $f \geqslant 0$, dostajemy

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t f(x-y^2)dy &= \frac{1}{2t}\int_0^{t^2} f(x-y)\frac{dy}{\sqrt{y}} = \sum_{m\geqslant 0}\frac{1}{2t}\int_{t^2/2^{m+1}}^{t^2/2^m} f(x-y)\frac{dy}{\sqrt{y}}\\ &\leqslant \sum_{m\geqslant 0} 2^{-m/2}\mathcal{M}f(x) \leqslant 4\mathcal{M}f(x).\end{aligned}$$

Zatem ograniczoność na $L^p(\mathbb{R})$ jak i słaby typ $(1,1)$ dla funkcji maksymalnej $\mathcal{M}^{\mathcal{P}}$ (z parametrami $d = k = 1$ i $\mathcal{P}(t) = t^2$) mogą być uzyskane z odpowiednich rezultatów dla funkcji maksymalnej Hardyego–Littlewooda $\mathcal{M}$.

Podobnie jak poprzednio dyskretny odpowiednik (załóżmy dla ułatwienia, że $d = k = 1$) maksymalnej transformaty Radona definiujemy

$$\mathcal{M}^{\mathcal{P}}_{\mathrm{dis}}f(n) = \sup_{N\in\mathbb{N}}|M^{\mathcal{P}}_N f(n)|, \tag{4.1}$$

gdzie

$$M^{\mathcal{P}}_N f(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} f(n-\mathcal{P}(m)), \tag{4.2}$$

a $\mathcal{P} : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ jest wielomianem całkowitoliczbowym.

Przejście pomiędzy $\mathcal{M}_{\mathrm{dis}}$ i $\mathcal{M}$, które widzieliśmy powyżej nie działa dla $\mathcal{M}^{\mathcal{P}}_{\mathrm{dis}}$ i $\mathcal{M}^{\mathcal{P}}$. Jest to spowodowane tym, że ciąg $(\mathcal{P}(n))_{n\in\mathbb{N}}$, gdy $\mathcal{P}$ jest wielomianem stopnia $\geqslant 2$ ma rozbieżne luki, mianowicie $\mathcal{P}(n+1) - \mathcal{P}(n) \simeq \mathcal{P}'(n) \to \pm\infty$. Nie można również porównać $\mathcal{M}^{\mathcal{P}}_{\mathrm{dis}}$ z $\mathcal{M}_{\mathrm{dis}}$ jak to miało miejsce w przypadku ciągłym. To jest po części spowodowane tym, że pewna zamiana zmiennych, która jest możliwa dla całek nie jest możliwa do wykonania dla sum. Podobne problemy występują, gdy pracujemy po stronie transformaty Fouriera[5]. Aby lepiej zrozumieć te komplikacje, rozważmy, (dla dużych $\xi > 0$) następujący przykład

$$m(\xi) = \int_a^b e^{2\pi i\xi x^2}dx,$$

[5]Jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, to $\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{2\pi i x\cdot\xi}dx$ oznacza transformatę Fouriera funkcji f na $\mathbb{R}^d$, a $\mathcal{F}^{-1}f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)e^{-2\pi i x\cdot\xi}d\xi$ jest odwrotną transformatą Fouriera funkcji $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
Jesli $f \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$, to $\mathcal{F}f(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} f(n)e^{2\pi i n\cdot\xi}dx$ oznacza transformatę Fouriera funkcji f na $\mathbb{Z}^d$, a $\mathcal{F}^{-1}f(n) = \int_{\mathbb{T}^d} f(\xi)e^{-2\pi i n\cdot\xi}d\xi$ jest współczynnikiem Fouriera funkcji $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$.

i jego dyskretny odpowiednik

$$m_{\text{dis}}(\xi) = \sum_{a<n\leqslant b} e^{2\pi i \xi n^2}.$$

Łatwo widzimy, że przez odpowiednią zamianę zmiennych ($u = x^2$) mamy

$$|m(\xi)| \leqslant C/\sqrt{\xi},$$

podczas, gdy w przypadku dyskretnym, jeśli ξ jest liczbą całkowitą, mamy

$$m_{\text{dis}}(\xi) = b - a.$$

Ten prosty przykład pokazuje, że pewne arytmetyczne własności odgrywają ważną rolę i zjawiska w dyskretnych problemach mogą być zupełnie odmienne.

Jednak w ostatnim czasie — w szczególności dwie ostatnie dekady — dyskretna analiza harmoniczna przeżyła okres znaczącego rozwoju. Stało się to głównie dzięki fundamentalnym pracom Bourgaina [4, 5, 6], gdzie zostało udowodnione punktowe twierdzenie ergodyczne dla kwadratów L^p, $(p > 1)$. Rezultaty Bourgaina zaowocowały również lepszym zrozumieniem dyskretnych operatorów całek singularnych [31, 32, 33, 34, 35, 54, 55, 60, 64, 65, 66, 72, 73, 74, 75].

4.3.2. *Zastosowania do teorii ergodycznej.* Funkcja maksymalna Hardyego–Littlewooda pierwotnie została użyta do pokazania twierdzenia Lebesguea o różniczkowaniu. Natomiast jej dyskretny odpowiednik jest ważnym obiektem w punktowych twierdzeniach ergodycznych.

Niech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ będzie układem dynamicznym na σ-skończonej przestrzeni miarowej $(X, \mathcal{B}, \mu)$, gdzie T jest odwracalnym przekształceniem zachowującym miarę na X i definiujmy operatory średniujące Birkhoffa

$$A_N f(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x).$$

Twierdzenie ergodyczne Birkhoffa mówi, że dla każdej funkcji $f \in L^p(X,\mu)$, gdzie $p \geqslant 1$ istnieje $f^* \in L^p(X,\mu)$ taka, że

$$\lim_{N\to\infty} A_N f(x) = f^*(x)$$

μ-prawie wszędzie na X.

Teraz łatwo można zauważyć podobieństwo dyskretnej funkcji maksymalnej Hardyego–Littlewooda $\mathcal{M}_{\text{dis}}$ z funkcją maksymalną $A^* f = \sup_{N\in\mathbb{N}} |A_N f|$ związaną z operatorami $A_N f$. Istotnie, biorąc $X = \mathbb{Z}$ zbiór liczb całkowitych, $\mathcal{B} = \mathbf{P}(\mathbb{Z})$ σ-algebra wszystkich podzbiorów $\mathbb{Z}$, $\mu = |\cdot|$ miarę liczącą na $\mathbb{Z}$ i $T(x) = x+1$ operator przesunięcia, widzimy, że

$$A_N f(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(x+n).$$

W świetle zasady transferencji Calderóna układ $(\mathbb{Z},\ \mathbf{P}(\mathbb{Z}),\ |\cdot|,\ T(x) = x+1)$ jest uniwersalnym układem dynamicznym w takim sensie, że ograniczoność na L^p dla $p > 1$, czy słaby typ $(1,1)$ funkcji maksymalnej A^* związanej z dowolnym układem dynamicznym $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, mogą zostać wywnioskowane z odpowiednich rezultatów dla dyskretnej funkcji maksymalnej Hardyego–Littlewooda $\mathcal{M}_{\text{dis}}$ na zbiorze liczb całkowitych. A dokładniej.

Twierdzenie 4.3 (Zasada transferencji Calderóna)**.** *Załóżmy, że $S \subseteq \mathbb{Z}$ jest nieskończonym zbiorem. Niech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ będzie układem dynamicznym związanym ze średnimi*

$$\mathcal{A}_N f(x) = \frac{1}{|S\cap[0,N]|}\sum_{n\in S\cap[0,N]} f(T^n x).$$

Niech $\mathcal{M}_N$ oznacza $\mathcal{A}_N$ na $(\mathbb{Z}, \mathbf{P}(\mathbb{Z}), |\cdot|, \mathcal{T})$ z przekształceniem przesunięcia $\mathcal{T}(x) = x+1$, tzn.

$$\mathcal{M}_N f(x) = \frac{1}{|S\cap[0,N]|}\sum_{n\in S\cap[0,N]} f(x+n).$$

Niech $\mathcal{M}^* f(x) = \sup_{N\in\mathbb{N}} |\mathcal{M}_N f(x)|$. Jeśli dla pewnego $p \geqslant 1$ istnieje $C_p > 0$ takie, że

$$\|\mathcal{M}^* f\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} \leqslant C_p \|f\|_{\ell^p(\mathbb{Z})}, \tag{4.4}$$

dla dowolnej funkcji $f \in \ell^p(\mathbb{Z})$*, lub*

$$\|\mathcal{M}^* f\|_{\ell^{1,\infty}(\mathbb{Z})} \leqslant C_1 \|f\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}, \tag{4.5}$$

dla dowolnej funkcji $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$*. Wtedy odpowiednio zachodzą następujące szacowania*

$$\|\mathcal{A}^* f\|_{L^p(X,\mu)} \leqslant C_p \|f\|_{L^p(X,\mu)}, \tag{4.6}$$

dla dowolnej funkcji $f \in L^p(X, \mu)$*, lub*

$$\|\mathcal{A}^* f\|_{L^{1,\infty}(X,\mu)} \leqslant C_1 \|f\|_{L^1(X,\mu)}, \tag{4.7}$$

dla dowolnej funkcji $f \in L^1(X, \mu)$*, gdzie* $\mathcal{A}^* f(x) = \sup_{N\in\mathbb{N}} |\mathcal{A}_N f(x)|$.

Używając zasady transferencji Calderóna i odpowiednich szacowań dla dyskretnej funkcji maksymalnej Hardyego–Littlewooda $\mathcal{M}_{\mathrm{dis}}$ możemy wywnioskować, że dla każdego $p \geqslant 1$ istnieje stała $C_p > 0$ taka, że dla wszystkich funkcji $f \in L^p(X, \mu)$ z $p > 1$, mamy

$$\|A^* f\|_{L^p(X,\mu)} \leqslant C_p \|f\|_{L^p(X,\mu)},$$

i dla wszystkich funkcji $f \in L^1(X, \mu)$, mamy

$$\|A^* f\|_{L^{1,\infty}(X,\mu)} \leqslant C_1 \|f\|_{L^1(X,\mu)}.$$

Te nierówności mają znaczenie w dowodzie punktowego twierdzenia ergodycznego, ponieważ pozwalają uzasadnić, że zbiór tych funkcji $f \in L^p(X, \mu)$ dla których granica $\lim_{N\to\infty} A_N f(x)$ istnieje μ-prawie wszędzie na X jest domknięty w $L^p(X, \mu)$.

Aby udowodnić zbieżność punktową operatora A_N wystarczy jedynie znaleźć gęstą klasę funkcji, powiedzmy, w $L^2(X, \mu)$ dla której mamy zbieżność punktową. Dobrym kandydatem okazuje się być zbiór

$$\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}_\infty \subseteq L^2(X, \mu),$$

gdzie

$$\mathcal{I} = \{f \in L^2(X, \mu) : f \circ T = f\},$$

i

$$\mathcal{J}_\infty = \{g \circ T - g : g \in L^2(X, \mu) \cap L^\infty(X, \mu)\}.$$

Łatwo widać, że $A_N f = f$, gdy $f \in \mathcal{I}$ oraz $\lim_{N\to\infty} A_N h = 0$ dla $h \in \mathcal{J}_\infty$ dzięki teleskopowemu zachowaniu operatora $A_N h$, mianowicie mamy

$$A_N h = \frac{1}{N}(g \circ T^N - g),$$

przy $h = g \circ T - g$. A to już uzasadnia zbieżność punktową na $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}_\infty$.

Sytuacja zmienia się dramatycznie, gdy rozważamy średnie ergodyczne, na przykład modelowane wzdłuż wielomianów całkowitoliczbowych $\mathcal{P}$, tzn.

$$A_N^{\mathcal{P}} f(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^{\mathcal{P}(n)} x).$$

Nawet dla $\mathcal{P}(n) = n^2$ jest trudno, a priori, znaleźć gęstą klasę dla której mamy zbieżność punktową. Zbiór $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}_\infty$ jest nieodpowiedni z tego względu, że średnie $A_N^{\mathcal{P}}$ wzdłuż ciągu $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ mają nieograniczone luki $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$, a to powoduje, że tracimy własność teleskopowania na $\mathcal{J}_\infty$.

Bourgain w połowie lat osiemdziesiątych ubiegłego stulecia w [4], [5] i [6], udowodnił ograniczoność na L^p dla $p > 1$ funkcji maksymalnej $A_{\mathcal{P}}^* f = \sup_{N\in\mathbb{N}} |A_N^{\mathcal{P}} f|$. A dokładniej pokazał, że dla każdego $p > 1$ istnieje stała $C_p > 0$ taka, że dla wszystkich funkcji $f \in L^p(X, \mu)$, mamy

$$\|A_{\mathcal{P}}^*\|_{L^p(X,\mu)} \leqslant C_p \|f\|_{L^p(X,\mu)}$$

ponadto zaproponował badanie nierówności oscylacyjnej na L^2, aby uzasadnić zbieżność punktową.

Mianowicie udowodnił, że istnieją stałe $C > 0$ i $c < 1/2$ takie, że dla każdej funkcji $f \in L^2(X, \mu)$, mamy

$$\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant J} \Big\| \sup_{N_j \leqslant N < N_{j+1}} |A_N^{\mathcal{P}} f - A_{N_j}^{\mathcal{P}} f| \Big\|_{L^2(X,\mu)}^2 \Big)^{1/2} \leqslant C J^c \|f\|_{L^2(X,\mu)},$$

dla każdego ciągu $N_{j+1} > 2N_j$. Nierówność oscylacyjna jest bardzo silnym narzędziem, które w połączeniu z nierównością na L^2 dla $A_{\mathcal{P}}^*$ implikuje zbieżność punktową operatora $A_N^{\mathcal{P}}$ na $L^2(X, \mu)$.

Dowody ograniczoności na L^2 nierówności oscylacyjnej jak i ograniczoność na L^p funkcji maksymalnej związanej z operatorami $A_N^{\mathcal{P}}$ bazują na metodzie łuków. Jest to zupełnie nowa metoda głęboko zakorzeniona w analitycznej teorii liczb. To podejście okazało się być przełomem rzucającym nowe światło na dyskretną analizę harmoniczną.

Metoda łuków (odsyłamy do [36, 58, 82]) została wymyślona przez Hardyego i Littlewooda, w latach dwudziestych ubiegłego stulecia, w celu opisania asymptotyki liczby rozwiązań w problemie Waringa tzn. liczby tych $(n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$, które są rozwiązaniem równania

$$n_1^k + \ldots + n_d^k = N.$$

Kilka lat później Vinogradov użył metody łuków do (częściowego) rozwiązania *trójkowej hipotezy Goldbacha* pokazując, że każda nieparzysta liczba naturalna N może być zapisana jako suma trzech liczb pierwszych $p_1, p_2, p_3 \in \mathbf{P}$, tzn.

$$p_1 + p_2 + p_3 = N.$$

Trójkowa hipoteza Goldbacha zakłada, że każda liczba nieparzysta N większa od 5 jest sumą trzech liczb pierwszych. W szczególności Vinogradov pokazał, że liczba $r(N)$ tych trójek (p_1, p_2, p_3), które są rozwiązaniem powyższego równania spełniają

$$r(N) = \frac{\mathfrak{S}(N) N^2}{2 \log^3 N} + o\left(\frac{N^2}{\log^3 N}\right),$$

gdzie $\mathfrak{S}(N)$ jest szeregiem osobliwym, tzn. pewną funkcją arytmetyczną, która jest jednostajne ograniczona z góry i z dołu [58]. Trójkowa hipoteza Goldbacha została niedawno udowodniona przez Helfgotta w serii prac [28, 29, 30].

4.3.3. *Metoda łuków Hardyego i Littlewooda.* Ta część jest poświęcona metodzie łuków Hardyego i Littlewooda. Szczególny nacisk zostanie położony na nierówność Weyla dla sum eksponencjalnych i zilustrowanie jak ona działa w kontekście formuły asymptotycznej w problemie Waringa. To pozwoli nam zrozumieć, że metoda łuków jest bardzo silnym narzędziem pozwalającym zredukować problemy z analitycznej teorii liczb lub dyskretnej analizy harmonicznej do pytań związanych z szacowaniem sum eksponencjalnych. Na koniec krótko wyjaśnimy, dlaczego metoda łuków jest użyteczna w punktowej teorii ergodycznej.

Jak już wspomnieliśmy metoda łuków została wymyślona przez Hardyego i Littlewooda do pokazania, że dla $k \geqslant 2$, $d \geqslant 2^k + 1$ i dostatecznie dużego $N \in \mathbb{N}$ liczba $r_k(N)$ tych $(n_1, n_2, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$, które są rozwiązaniem równania

$$n_1^k + n_2^k + \ldots + n_d^k = N,$$

jest równa asymptotycznie

$$r_k(N) = \mathfrak{S}(N) \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)^d}{\Gamma\left(\frac{d}{k}\right)} N^{\frac{d}{k} - 1} + o\big(N^{\frac{d}{k} - 1 - \delta}\big), \tag{4.8}$$

dla pewnego $\delta > 0$, gdzie $\Gamma(x)$ jest funkcją Gamma, $\mathfrak{S}(N)$ jest szeregiem osobliwym, tzn.

$$\mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q} G(a/q)^d e^{-2\pi i N a/q},$$

który jest jednostajnie ograniczony z góry i z dołu, a

$$G(a/q) = \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{a}{q} r^k}$$

jest sumą Gausowską [58].

Sumy Gausowskie są też często nazywane *zupełnymi sumami eksponencjalnymi* i są ważnymi obiektami w teorii liczb. Jeśli $(a, q) = 1$, to $G(a/q)$ ma wiele skracań. Dość łatwo sprawdzić, że dla $k = 2$ mamy $|G(a/q)| \leqslant 2q^{-1/2}$. Jeśli $d \geqslant 5$, to szacowanie górne dla $G(a/q)$ zapewnia, że $\mathfrak{S}(N)$ jest dobrze zdefiniowany. Używając metody różnicowej (w analizie harmonicznej nazywamy to argumentem TT^*) widzimy, że

$$|qG(a/q)|^2 = qG(a/q)q\overline{G(a/q)} = \sum_{|d|<q}\bigg(\sum_{n=1-d}^{q-d} e^{2\pi i\frac{2adn}{q}}\bigg)e^{2\pi i\frac{a}{q}d^2}.$$

Analizując sumę wewnętrzną można pokazać, że $|qG(a/q)|^2 \leqslant 4q$.

Teraz pokażemy jak otrzymać asymptotykę w (4.8) używając metody łuków. To pozwoli nam zrozumieć tę metodę zwłaszcza, gdy będziemy używać jej do szacowania transformat Fouriera związanych z jądrami operatorów, którymi będziemy zajmować się w dalszej części. Ustalmy $k \geqslant 2$ i niech

$$S_N = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{N}^d : \ x_1^k + x_2^k + \dots + x_d^k = N\}.$$

Zauważmy, że dla $P_N = \lfloor N^{1/k}\rfloor$ mamy

$$\begin{aligned} r_k(N) &= \sum_{(n_1,n_2,\dots,n_d)\in\mathbb{N}^d} \mathbb{1}_{S_N}((n_1, n_2, \dots, n_d)) \\ &= \sum_{n_1=1}^{P_N}\cdots\sum_{n_d=1}^{P_N}\int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i\xi(n_1^k+n_2^k+\dots+n_d^k)}e^{-2\pi i\xi N}d\xi \\ &= \int_{-1/2}^{1/2}\bigg(\sum_{n=1}^{P_N} e^{2\pi i\xi n^k}\bigg)^d e^{-2\pi i\xi N}d\xi. \qquad (4.9) \end{aligned}$$

Naszym celem będzie znalezienie asymptotyki dla całki w (4.9).

Gdyby ostatnia suma była całką, to otrzymalibyśmy następującą formułę asymptotyczną

$$\int_{-1/2}^{1/2}\bigg(\int_0^{N^{1/k}} e^{2\pi i\xi x^k}dx\bigg)^d e^{-2\pi i\xi N}d\xi = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)^d}{\Gamma\left(\frac{d}{k}\right)}N^{\frac{d}{k}-1} + o\big(N^{\frac{d}{k}-1-\delta}\big), \qquad (4.10)$$

i dowód byłby zakończony, odsyłamy do [82]. Jednak nasza sytuacja jest dużo bardziej skomplikowana. Na szczęście na koniec będziemy w stanie zredukować nasz problem do sytuacji ciągłej, i kosztem czynnika $\mathfrak{S}(N)$ w wyrazie głównym, otrzymamy tą samą formułę asymptotyczną. Aby to uzyskać wystarczy zastąpić sumę w (4.9) przez całkę

$$\int_0^{N^{1/k}} e^{2\pi i\xi x^k}dx.$$

Jednak nie możemy tego zrobić w naiwny sposób, ponieważ pochodna funkcji fazowej $n^k\xi$ występującej w sumie eksponencjalnej wynosi $kn^{k-1}\xi$ i może być bardzo duża. Z tego powodu może być ciężko kontrolować błąd

$$\sum_{n=1}^{P_N} e^{2\pi i\xi n^k} - \int_0^{N^{1/k}} e^{2\pi i\xi x^k}dx.$$

Aby poradzić sobie z tym problemem użyjemy zasady Dirichleta i przybliżymy ξ ułamkiem nieskracalnym a/q w następujący sposób

$$\Big|\xi - \frac{a}{q}\Big| \leqslant \frac{1}{P_N^{k-\beta}},$$

gdzie $1 \leqslant q \leqslant P_N^{k-\beta}$, $0 \leqslant a \leqslant q$ i $(a, q) = 1$ dla pewnego $\beta > 0$, które dobierzemy później. Załóżmy, że $1 \leqslant q \leqslant P_N^{\alpha}$ dla pewnego $\alpha > 0$, które również będzie dobrane później. Teraz stosując twierdzenie o wartości średniej oraz malenie z powyższej aproksymacji otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bigg(\sum_{n=1}^{P_N} e^{2\pi i\xi n^k}\bigg)^d &= \bigg(\sum_{r=1}^{q} e^{2\pi i\frac{a}{q}r^k}\sum_{-\frac{r}{q}<n\leqslant\frac{P_N-r}{q}} e^{2\pi i(\xi-\frac{a}{q})(qn+r)^k}\bigg)^d \qquad (4.11) \\ &= \bigg(G(a/q)\cdot\int_0^{N^{1/k}} e^{2\pi i(\xi-\frac{a}{q})x^k}dx\bigg)^d + \mathcal{O}\big(N^{\frac{d}{k}-\frac{1}{k}+\frac{\alpha}{k}+\frac{\beta}{k}}\big). \end{aligned}$$

To sugeruje, że asymptotyka jest skoncentrowana wokół diofantycznych aproksymacji ξ z małymi mianownikami. Aby sformalizować tę obserwację Hardy i Littlewood rozłożyli odcinek jednostkowy na łuki główne i poboczne. Podążając tą ideą ustalmy $N \in \mathbb{N}$ i $\alpha, \beta > 0$ i definiujemy rodzinę *łuków głównych*

$$\mathfrak{M}_{P_N} = \bigcup_{1 \leqslant q \leqslant P_N^\alpha} \bigcup_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q} \mathfrak{M}_{P_N}(a/q),$$

gdzie

$$\mathfrak{M}_{P_N}(a/q) = \{\xi \in [0,1] : |\xi - a/q| \leqslant P_N^{-(k-\beta)}\}.$$

Łatwo zauważyć, że jeśli a/q przebiega zbiór ułamków o małych mianownikach (tzn. $1 \leqslant q \leqslant P_N^\alpha$ i $(a,q) = 1$), to zbiory $\mathfrak{M}_{P_N}(a/q)$ są rozłączne.

Łuki poboczne definiujemy następująco

$$\mathfrak{m}_{P_N} = [0,1] \setminus \mathfrak{M}_{P_N}.$$

Dzięki temu rozkładowi dostajemy

$$r_k(N) = \sum_{1 \leqslant q \leqslant P_N^\alpha} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q} \int_{\mathfrak{M}_{P_N}(a/q)} \left(\sum_{n=1}^{P_N} e^{2\pi i \xi n^k} \right)^d e^{-2\pi i \xi N} d\xi \tag{4.12}$$

$$+ \int_{\mathfrak{m}_{P_N}} \left(\sum_{n=1}^{P_N} e^{2\pi i \xi n^k} \right)^d e^{-2\pi i \xi N} d\xi. \tag{4.13}$$

To natychmiastowo pokazuje, w świetle (4.11) i (4.10), że (4.12) zachowuję się asymptotycznie jak

$$\mathfrak{S}(N) \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)^d}{\Gamma\left(\frac{d}{k}\right)} N^{\frac{d}{k}-1} + o\big(N^{\frac{d}{k}-1-\delta}\big),$$

dla pewnego $\delta > 0$.

Pozostaje pokazać, że $\mathfrak{m}_{P_N}$ w (4.13) daje błąd rzędu $o\big(N^{\frac{d}{k}-1-\delta}\big)$. Jeśli q jest duże, to suma w (4.9) ma bardzo dużo skracań i używając nierówności Weyla można pokazać, że jest mała. To była również kluczowa obserwacja pochodząca od Hardyego i Littlewooda.

Twierdzenie 4.14 (Nierówność Weyla). *Niech $P(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x$ będzie wielomianem o rzeczywistych współczynnikach stopnia $k \geqslant 2$ takim, że*

$$\left| a_k - \frac{a}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q^2},$$

gdzie $1 \leqslant a \leqslant q$, $q \in \mathbb{N}$ i $(a,q) = 1$. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje stała $C_\varepsilon > 0$ taka, że dla wszystkich $N \in \mathbb{N}$ mamy

$$\left| \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i P(n)} \right| \leqslant C_\varepsilon N^{1+\varepsilon} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{N} + \frac{q}{N^k} \right)^{\frac{1}{2^{k-1}}}. \tag{4.15}$$

Zauważmy, że (4.15) z $P(n) = n^2$ oraz $N = q$ daje oszacowanie z góry na sumy Gausowskie. Mianowicie $|G(a/q)| \lesssim q^{-1/2+\varepsilon}$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$. To szacowanie jest troszkę gorsze od tego które uzyskaliśmy powyżej, ale nadal wystarczające aby pokazać, że szereg osobliwy jest dobrze określony.

Spróbujmy teraz sformalizować to co powiedzieliśmy powyżej i pokazać, że (4.9) zachowuje się jak $o\big(N^{\frac{d}{k}-1-\delta}\big)$ używając nierówności Weyla. Mianowicie, niech $\xi \in \mathfrak{m}_{P_N}$ wtedy $P_N^\alpha < q \leqslant P_N^{k-\beta}$ oraz

$$\left| \sum_{n=1}^{P_N} e^{2\pi i \xi n^k} \right| \leqslant C_\varepsilon P_N^{1-\rho}, \tag{4.16}$$

dla pewnego $\rho > 0$. Istotnie, $\xi \in \mathfrak{m}_{P_N}$, a z zasady Dirichleta zawsze możemy znaleźć $1 \leqslant q \leqslant P_N^{k-\beta}$ i $0 \leqslant a \leqslant q$ takie, że $(a,q) = 1$ i

$$\left| \xi - \frac{a}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q P_N^{k-\beta}} \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

Gdyby $q \leqslant P_N^\alpha$ to $\xi \in \mathfrak{M}_{P_N}$, ale to przeczy temu, że $\xi \in \mathfrak{m}_{P_N}$. Stąd $q > P_N^\alpha$ musi być duże i nierówność Weyla kończy dowód.

Stosując (4.16) dostajemy

$$\Big|\int_{\mathfrak{m}_{P_N}}\Big(\sum_{n=1}^{P_N} e^{2\pi i\xi n^k}\Big)^d e^{-2\pi i\xi N}d\xi\Big| \leqslant \sup_{\xi\in\mathfrak{m}_{P_N}}\Big|\sum_{n=1}^{P_N} e^{2\pi i\xi n^k}\Big|^{d-2^k}\int_0^1\Big|\sum_{n=1}^{P_N} e^{2\pi i\xi n^k}\Big|^{2^k}d\xi$$
$$\lesssim P_N^{(1-\rho)(d-2^k)}P_N^{2^k-k+\varepsilon} = P_N^{d-k-\gamma} \leqslant N^{\frac{d}{k}-1-\frac{\gamma}{k}},$$

gdzie $\gamma = \rho(d-2^k)-\varepsilon > 0$, dla $\varepsilon > 0$ które jest dowolnie małe, ponieważ w świetle nierówności Hua (odsyłamy do [58]) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mamy

$$\int_0^1\Big|\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i\xi n^k}\Big|^{2^k}d\xi \leqslant C_\varepsilon N^{2^k-k+\varepsilon}.$$

To kończy ten krótki opis metody Hardyego–Littlewooda.

Bourgain, w swoich pracach [4, 5, 6], wykorzystał metodę łuków do konstrukcji mnożników przybliżających dla średnich ergodycznych wzdłuż kwadratów czy wielomianów całkowitoliczbowych. Następnie pokazał ich ograniczoność na L^p. Ponieważ podejście Bourgaina miało znaczący wpływ na rozwój dyskretnej analizy harmonicznej i było bardzo istotne w naszych badaniach (**[H4]** i **[H5]**), to pokrótce postaramy się opisać tę metodę.

Dla ułatwienia będziemy jedynie rozważać ograniczoność na $\ell^2(\mathbb{Z})$ funkcji maksymalnej $\mathcal{M}_{\mathrm{dis}}^{\mathcal{P}}f(n) = \sup_{N\in\mathbb{N}}|M_N^{\mathcal{P}}f(n)|$, gdzie

$$M_N^{\mathcal{P}}f(n) = \frac{1}{N}\Big|\sum_{m=1}^{N} f(n-\mathcal{P}(m))\Big|,$$

a $\mathcal{P}(m) = m^k$ dla pewnego $k \geqslant 2$.

(i) Używając twierdzenia Plancherela wystarczy badać mnożnik $m_N(\xi)$ związany z operatorem $M_N^{\mathcal{P}}$, tzn. $\mathcal{F}(M_N^{\mathcal{P}}f)(\xi) = m_N(\xi)\mathcal{F}f(\xi)$, gdzie

$$m_N(\xi) = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} e^{2\pi i\xi\mathcal{P}(m)}, \quad \text{dla} \quad \xi \in [0,1].$$

(ii) W tym momencie okazuje się, że metoda łuków Hardyego–Littlewooda idealnie pasuje do naszego schematu i możemy rozłożyć odcinek jednostkowy $[0,1]$ na rozłączne zbiory:
   – Łuki główne, czyli pododcinki $[0,1]$ składające się z tych $\xi \in [0,1]$, które są bliskie ułamkom wymiernym a/q z małymi mianownikami q dobranymi do skali $N \in \mathbb{N}$.
   – Łuki poboczne, czyli dopełnienie w $[0,1]$ kolekcji wszystkich łuków głównych, dla ustalonego $N \in \mathbb{N}$.

(iii) Dla tego rozkładu można pokazać, że $m_N(\xi)$ może być przybliżony w normie $L^\infty([0,1])$ przez funkcję $k_N(\xi)$, będącą sumą $G(a/q)w_N(\xi - a/q)$ związaną z kolekcją wszystkich łuków głównych związanych ze skalą $N \in \mathbb{N}$, gdzie w_N jest całkową wersją mnożnika m_N, a $G(a/q)$ jest sumą Gaussowską. Korzyść z takiego podejścia jest taka, że błąd pomiędzy mnożnikami $m_N(\xi)$ i $k_N(\xi)$ jest niesiony na łukach pobocznych i można wykazać, że jest mały korzystając z nierówności Weyla.

(iv) Z drugiej strony używając następujących faktów:
   – sumy Gaussowskie $G(a/q)$ mają odpowiednie malenie ze względu na q,
   – łuki główne dla różnych a/q i a'/q' są rozłączne (przy ustalonym $N \in \mathbb{N}$),

   można pokazać, że funkcja maksymalna związana z operatorem splotowym, którego mnożnik jest równy $k_N(\xi)$ jest ograniczona na $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Metoda łuków w swoich zastosowaniach nie jest jedynie zlimitowana do operatorów średniujących, pozwala również badać operatory całek singularnych modelowanych na podzbiorach arytmetycznych. Twierdzenie Steina i Waingera [74, 75], Oberlina [60] i Ionescu i Waingera [35] sformułowane poniżej, dostarcza ważnych przykładów dyskretnych operatorów singularnych.

Twierdzenie 4.17. *Dla $0 < \lambda < 1$, zdefiniujmy operatory*

$$I_\lambda^s f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{f(n-m^s)}{|m|^\lambda}, \quad \textit{gdzie } n \in \mathbb{Z}, \qquad i$$

$$J_\lambda^s f(n,t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{f(n-m,t-m^s)}{|m|^\lambda}, \quad \textit{gdzie } (n,t) \in \mathbb{Z}^2.$$

Operator I_λ^2 jest ograniczony z $\ell^p(\mathbb{Z})$ do $\ell^q(\mathbb{Z})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $1/q < \lambda, 1/p > 1-\lambda$, i $1/q \leqslant 1/p - \frac{1}{2}(1-\lambda)$. Ponadto J_λ^2 jest ograniczony z $\ell^p(\mathbb{Z}^2)$ do $\ell^q(\mathbb{Z}^2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $1/q < \lambda, 1/p > 1-\lambda$, i $1/q \leqslant 1/p - \frac{1}{3}(1-\lambda)$.

Ten rezultat ma dość bogatą historię (odsyłamy do [65]), która istotnie wzbogaciła dyskretną analizę harmoniczną dostarczając wielu użytecznych narzędzi. Jednak analogiczne wyniki dla $s \geqslant 3$, obecnie pozostają poza naszym zasięgiem, ze względu na brak ostrych szacowań dla odpowiednich sum eksponencjalnych. Wielowymiarowe warianty twierdzenia 4.17 były niedawno badane przez Pierce [66]. Dowód twierdzenia 4.17 jest w dużej mierze oparty na rezultacie Ionescu i Waingera [35] dla dyskretnej całki singularnej typu Radona.

Twierdzenie 4.18. *Niech $T^{\mathcal{P}}$ będzie singularną transformatą Radona*

$$T^{\mathcal{P}} f(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^k\setminus\{0\}} f(x-\mathcal{P}(y))K(y),$$

dla $x \in \mathbb{Z}^d$, modelowaną na przekształceniu wielomianowym $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_d) : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^d$ takim, że $\mathcal{P}[\mathbb{Z}^k] \subseteq \mathbb{Z}^d$, gdzie K jest jądrem Calderóna–Zygmunda. Wtedy operator $T^{\mathcal{P}}$ jest ograniczony na $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ dla wszystkich $p \in (1,\infty)$.

Twierdzenie 4.18 jest nie tylko interesujące samo w sobie, ale używa bardzo wysublimowanych metod w dyskretnej analizie harmonicznej. Główna idea Ionescua i Waingera używa diofantycznych aproksymacji współczynników wielomianu $\mathcal{P}$ podobnie jak w metodzie łuków, ale w przeciwieństwie do wcześniejszych metod, autorzy wykorzystali ich własności silnej ortogonalności, odsyłamy również do [65].

Jednym z najważniejszych rezultatów dla operatorów średniujących jest twierdzenie Magyara, Steina i Waingera [54].

Twierdzenie 4.19. *Niech $A^*f(n) = \sup_{\lambda>0}|A_\lambda f(n)|$ będzie dyskretną maksymalną funkcją sferyczną, gdzie*

$$A_\lambda f(n) = \frac{1}{|S_\lambda|}\sum_{m\in S_\lambda} f(n-m),$$

i

$$S_\lambda = \{(m_1,\ldots,m_d) \in \mathbb{Z}^d : m_1^2 + \ldots + m_d^2 = \lambda^2\}.$$

Funkcja maksymalna A^* jest ograniczona na $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d \geqslant 5$ i $p > d/(d-2)$.

W [32] Ionescu podał również pewne szacowania dla A^* w punktach krańcowych. Ostatnio Hughes [31] rozszerzył powyższe twierdzenie do k-sfer i rozważał również odpowiednik A^* dla wymiaru $d = 4$. Twierdzenie 4.19, pomimo interesujących zastosowań w teorii ergodycznej [53], [31], pokazuje również ciekawe zjawisko w dyskretnym świecie. Mianowicie, zakres parametrów $d \geqslant 5, p > d/(d-2)$ dla których A^* jest ograniczony jest różny od zakresu parametrów $d \geqslant 2, p > d/(d-1)$ dla jego ciągłego odpowiednika [71].

Na koniec warto wspomnieć, że pewien wielowymiarowy odpowiednik operatora M_N^P zdefiniowanego w (4.2) był badany przez Ionescu, Magyara, Steina i Waingera [33] w sytuacji nie-translacyjno niezmienniczej. Mianowicie, dla przekształcenia wielomianowego $P : \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}^k \mapsto \mathbb{Z}^d$ stopnia co najwyżej 2, zostało pokazane w [33], że funkcja maksymalna związana ze średnimi

$$M_N^P f(m_1,m_2) = \frac{1}{N^k}\sum_{n\in[1,N]^k\cap\mathbb{Z}^k} f\big(m_1-n, m_2-P(m_1,n)\big),$$

jest ograniczona na $\ell^p(\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}^d)$ dla $p > 1$ i wszystkich $f \in \ell^p(\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}^d)$. Dyskretny wariant singularnej transformaty Radona również był badany w [33].

4.3.4. *Wprowadzenie.* Zamierzamy studiować dyskretne odpowiedniki funkcji maksymalnych i całek singularnych zdefiniowane wzdłuż ciągów $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ mających pewne własności arytmetyczne. Mianowicie

$$\mathcal{M}^a_{\mathrm{dis}} f(x) = \sup_{N\in\mathbb{N}} \Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x-a_n)\Big|,$$

oraz

$$\mathcal{H}^a_{\mathrm{dis}} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x-a_n)-f(x+a_n)}{n},$$

Jeśli $a_n = n$, to $\mathcal{M}^a_{\mathrm{dis}} = \mathcal{M}_{\mathrm{dis}}$ i $\mathcal{H}^a_{\mathrm{dis}} = \mathcal{H}_{\mathrm{dis}}$.

Nasze motywacje do badania dyskretnych funkcji maksymalnych i operatorów całek singularnych (modelowanych na podzbiorach liczb całkowitych) są następujące. Po pierwsze z jednej strony mają one bezpośrednie zastosowanie w teorii ergodycznej, zwłaszcza w dowodach punktowych twierdzeń ergodycznych. Po drugie np. ich ograniczoność na ℓ^2 może być niestabilna na niewielkie perturbacje, tzn. istnieją ciągi[6] $a_n \simeq n^2$ takie, że

$$\mathcal{M}^a_{\mathrm{dis}} f(x) = \sup_{N\in\mathbb{N}} \Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x-a_n)\Big|,$$

jest nieograniczona na $\ell^2(\mathbb{Z})$. To daje silną motywację do głębszego zrozumienia tych zagadnień. Inną ważną przyczyną, która czyni dyskretną analizę harmoniczną bardzo interesującą dziedziną jest fakt, że fenomeny występujące w dyskretnym świecie mogą się zupełnie różnić od ich ciągłych odpowiedników, warto porównać z Twierdzeniem 4.19.

Teraz będziemy skupiać naszą uwagę na funkcjach maksymalnych związanych z dyskretnymi operatorami średniującymi i operatorami przyciętych całek singularnych. Nasze operatory będziemy definiować wzdłuż podzbiorów liczb całkowitych (**[H3]** i **[H5]**) jak i wzdłuż podzbiorów liczb pierwszych $\mathbf{P}$, czy cienkich podzbiorów liczb pierwszych (**[H1]** i **[H4]**).

Podzbiór S liczb pierwszych nazywamy cienkim, jeśli $|S| = \infty$ i

$$|S\cap[1,x]| = \mathrm{o}(|\mathbf{P}\cap[1,x]|) = \mathrm{o}\Big(\frac{x}{\log x}\Big), \ \text{ gdy } \ x\to\infty.$$

Z twierdzenia o liczbach pierwszych wiemy, że $|\mathbf{P}\cap[1,x]| \sim \frac{x}{\log x}$, przy $x\to\infty$. W szczególności będziemy rozważać podzbiory liczb całkowitych następującej postaci

$$\mathbf{N}_h = \{\lfloor h(n)\rfloor : n\in\mathbb{N}\},$$

oraz $\mathbf{P}_h = \mathbf{N}_h \cap \mathbf{P}$ z funkcjami

$$h(x) = x^c L(x),$$

gdzie $L(x)$ jest odpowiednią funkcją wolnozmieniającą się, a $c > 1$ jest dostatecznie blisko 1, można myśleć, że $L(x) = \log x$, (odsyłamy do Definicji 4.25). Okazuję się, że zbiory $\mathbf{P}_h$ dostarczają szeroką klasę cienkich podzbiorów liczb pierwszych. Zbiory $\mathbf{P}_h$ są ciekawymi obiektami zwłaszcza w świetle wielu fundamentalnych problemów w kombinatoryce addytywnej czy analitycznej teorii liczb. W szczególności, pytania dotyczące addytywnej struktury zbiorów $\mathbf{P}_h$ są bardzo interesujące i będą tutaj również dyskutowane (**[H1]** i **[H2]**).

Zbiór liczb pierwszych Piatetskiego–Shapiro

$$\mathbf{P}_\gamma = \mathbf{P}_{x^{1/\gamma}},$$

ustalonego typu $\gamma < 1$, (dla γ dostatecznie bliskich 1), jest przypuszczalnie najlepiej znanym deterministycznym przykładem cienkiego zbioru liczb pierwszych. W 1953 Piatetski–Shapiro [63] udowodnił, że dla $\gamma \in (11/12, 1)$ mamy

$$|\mathbf{P}_\gamma\cap[1,x]| \sim \frac{x^\gamma}{\log x}, \ \text{ gdy } \ x\to\infty.$$

To oczywiście gwarantuje, w świetle twierdzenia o liczbach pierwszych $\mathbf{P}$, że $\mathbf{P}_\gamma$ jest cienkim podzbiorem liczb pierwszych, ponieważ $\gamma < 1$. Zakres parametrów w formule asymptotycznej był niejednokrotnie poprawiany. Dzięki Rivatowi i Sargosowi [68] wiemy, że formuła asymptotyczna dla $\mathbf{P}_\gamma$ zachodzi dla $\gamma \in (2426/2817, 1)$, i jest to najlepszy wynik w tej dziedzinie. Mimo tego, że Leitmann [51] uogólnił

[6] Obserwacja Michaela Christa, o której dowiedziałem się od Jima Wrighta.

rezultat Piatetskiego–Shapiro i otrzymał formułę asymptotyczną dla zbiorów $\mathbf{P}_h$, gdzie $h(x) = x^c L(x)$ jest jak wyżej i $c \in [1, 12/11)$, wciąż niezbyt wiele wiadomo o zbiorach $\mathbf{P}_h$. Dalej będziemy studiować własności zbiorów $\mathbf{P}_h$ w różnych kontekstach.

4.3.5. $\ell^p(\mathbb{Z})$ - *boundedness of discrete maximal functions along thin subsets of primes and pointwise ergodic theorems* **[H1]**. W połowie lat osiemdziesiątych ubiegłego stulecia Bourgain i Wierdl uogólnili punktowe twierdzenie ergodyczne Birkhoffa pokazując, że zbieżność punktowa zachodzi nawet, gdy w operatorach średniujących sumowanie po liczbach naturalnych zastąpimy sumowaniem po liczbach pierwszych. A dokładniej niech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ będzie układem dynamicznym z odwracalnym przekształceniem T zachowującym miarę na σ-skończonej przestrzeni miarowej $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Wtedy dla każdej funkcji $f \in L^r(X, \mu)$, gdzie $r > 1$, granica

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{|\mathbf{P} \cap [1, N]|} \sum_{p\in\mathbf{P}\cap[1,N]} f(T^p x), \tag{4.20}$$

istnieje dla μ-prawie wszystkich $x \in X$. Tutaj odsyłamy do [6] i [85]. W tym samym czasie Nair [56, 57] udowodnił, że (4.20) pozostaje prawdziwe, gdy T^p zastąpimy przez $T^{W(p)}$, gdzie W jest dowolnym wielomianem całkowitoliczbowym. Ograniczenie do parametrów $r > 1$ okazuje się być kluczowe. LaVictoire [50] pokazał, uogólniając pracę Buczolicha i Mauldina [11], że (4.20) nie zachodzi na $L^1(X, \mu)$.

W **[H1]** uogólniliśmy rezultaty Bourgaina [6], Wierdla [85] i Naira [56, 57] do przypadku kiedy średnie ergodyczne (4.20) są zdefiniowane wzdłuż odpowiednich podzbiorów liczb pierwszych.

W szczególności pokazaliśmy, że punktowe twierdzenie ergodyczne zachodzi dla średnich wzdłuż liczb pierwszych Piatetskiego–Shapiro

$$\mathbf{P}_\gamma = \{p \in \mathbf{P} : \exists_{n\in\mathbb{N}}\, p = \lfloor n^{1/\gamma} \rfloor\}.$$

ustalonego typu $\gamma < 1$, gdzie γ jest dostatecznie blisko 1.

Twierdzenie 4.21 (**[H1]**, Theorem 1.1)**.** *Niech $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ będzie układem dynamicznym, a $W : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ niech będzie wielomianem stopnia $q \in \mathbb{N}$. Wtedy istnieje $0 < \gamma_q < 1$ takie, że dla każdego $\gamma_q < \gamma < 1$ granica*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{|\mathbf{P}_\gamma \cap [1, N]|} \sum_{p\in\mathbf{P}_\gamma\cap[1,N]} f(T^{W(p)} x),$$

istnieje μ-prawie wszędzie na X, dla każdego $f \in L^r(X, \mu)$, gdzie $r > 1$.

W świetle zasady transferencji (Twierdzenie 4.3), możemy pracować na zbiorze liczb całkowitych. Wtedy definiujemy

$$M_{S,N} f(x) = \frac{1}{|S \cap [1, N]|} \sum_{p\in S\cap[1,N]} f(x - W(p)), \quad \text{dla } x \in \mathbb{Z}, \tag{4.22}$$

wzdłuż ustalonego zbioru $S \subseteq \mathbf{P}$, gdzie $W : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ jest wielomianem stopnia $q \in \mathbb{N}$. Następnie definiujemy funkcję maksymalną $M_S f(x) = \sup_{N\in\mathbb{N}} |M_{S,N} f(x)|$ związaną ze średnimi z (4.22). Takie funkcje maksymalne, jak już widzieliśmy wcześniej, odgrywają ważną rolę w problemach związanych z punktową zbieżnością.

Warto podkreślić, że Bourgain [6] i Wierdl [85] (z $W(x) = x$) oraz Nair [56, 57] (dla ogólnych wielomianów W) pokazali, że funkcja maksymalna $M_{\mathbf{P}}$ jest ograniczona na $\ell^r(\mathbb{Z})$ dla każdego $r > 1$. W **[H1]** udowodniliśmy pierwsze twierdzenie maksymalne dla średnich wzdłuż zbiorów liczb pierwszych Piatetskiego–Shapiro.

Twierdzenie 4.23 (**[H1]**, Theorem 1.2)**.** *Niech $W : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ będzie wielomianem stopnia $q \in \mathbb{N}$. Wtedy istnieje $0 < \gamma_q < 1$ taka, że dla każdego $\gamma_q < \gamma < 1$ i dla każdego $1 < r \leqslant \infty$ znajdziemy $C > 0$ dla którego mamy*

$$\|M_{\mathbf{P}_\gamma} f\|_{\ell^r(\mathbb{Z})} \leqslant C \|f\|_{\ell^r(\mathbb{Z})},$$

dla wszystkich $f \in \ell^r(\mathbb{Z})$.

Zbiór liczb pierwszych Piatetskiego–Shapiro jest szczególnym przykładem dość szerokiej klasy cienkich podzbiorów liczb pierwszych $\mathbf{P}$, które są postaci

$$\mathbf{P}_h = \{p \in \mathbf{P} : \exists_{n\in\mathbb{N}}\, p = \lfloor h(n)\rfloor\}, \tag{4.24}$$

gdzie h jest funkcją jak w Definicji 4.25. W szczególności możemy myśleć o zbiorach $\mathbf{P}_h$, gdzie funkcja h jest postaci

$$h_1(x) = x^c \log^A x,\ \ h_2(x) = x^c e^{A\log^B x},\ \ h_3(x) = x\log^C x,$$
$$h_4(x) = xe^{C\log^B x},\ \ h_5(x) = xl_m(x),$$

dla $c \in (1,2)$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in (0,1)$, $C > 0$, $l_1(x) = \log x$ oraz $l_{m+1}(x) = \log(l_m(x))$, dla $m \in \mathbb{N}$.

Definicja 4.25. *Dla $c \in [1,2)$ niech $\mathcal{F}_c$ będzie rodziną wszystkich funkcji $h : [x_0,\infty) \mapsto [1,\infty)$ (dla pewnego $x_0 \geqslant 1$) spełniających następujące własności*

(i) $h \in \mathcal{C}^\infty([x_0,\infty))$ *oraz*

$$h'(x) > 0,\quad h''(x) > 0,\ \ \textit{dla każdego}\ \ x \geqslant x_0.$$

(ii) *Istnieje funkcja rzeczywista $\vartheta \in \mathcal{C}^\infty([x_0,\infty))$ oraz stała $C_h > 0$ taka, że*

$$h(x) = C_h x^c \ell_h(x),\ \ \textit{gdzie}\ \ \ell_h(x) = e^{\int_{x_0}^x \frac{\vartheta(t)}{t}dt},\ \ \textit{dla każdego}\ \ x \geqslant x_0. \tag{4.26}$$

Ponadto jeśli $c > 1$, to dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\lim_{x\to\infty} \vartheta(x) = 0,\ \ i\ \ \lim_{x\to\infty} x^n\vartheta^{(n)}(x) = 0. \tag{4.27}$$

(iii) *Jeśli $c = 1$, to $\vartheta(x)$ jest dodatnia, malejąca i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje stała $C_\varepsilon > 0$*

$$\frac{1}{\vartheta(x)} \leqslant C_\varepsilon x^\varepsilon,\ \ i\ \ \lim_{x\to\infty}\frac{x}{h(x)} = 0. \tag{4.28}$$

Ponadto dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to\infty} \vartheta(x) = 0,\ \ i\ \ \lim_{x\to\infty}\frac{x^n\vartheta^{(n)}(x)}{\vartheta(x)} = 0. \tag{4.29}$$

Niach $\varphi : [h(x_0),\infty) \mapsto [1,\infty)$ będzie funkcją odwrotną do funkcji h i niech $\pi_h(x)$ oznacza ilość elementów w zbiorze $\mathbf{P}_{h,x} = \mathbf{P}_h \cap [1,x]$. Rodzina $\mathcal{F}_c$ została wprowadzona przez Leitmanna w [51], gdzie zostało pokazane, że

$$\pi_h(x) \sim \frac{\varphi(x)}{\log x},\ \ \text{gdy}\ \ x \to \infty, \tag{4.30}$$

dla każdej funkcji $h \in \mathcal{F}_c$ z $c \in [1, 12/11)$. Jednak oryginalna definicja Leitmanna była dużo bardziej skomplikowana. Tutaj kosztem dodatkowych wysiłków udało nam się wyeliminować pewne komplikacje dostając bardziej przyjazną definicję i jednocześnie zachować tą samą klasę funkcji.

Niech $c_q = (2^{2q+2} + 2^q - 2)/(2^{2q+2} + 2^q - 3)$ dla $q \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 4.31 ([H1], Theorem 1.4). *Niech $W : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ będzie wielomianem stopnia $q \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że $h \in \mathcal{F}_c$ dla $c \in [1, c_q)$. Wtedy dla każdego $1 < r \leqslant \infty$ istnieje stała $C > 0$ taka, że*

$$\|M_{\mathbf{P}_h} f\|_{\ell^r(\mathbb{Z})} \leqslant C\|f\|_{\ell^r(\mathbb{Z})}, \tag{4.32}$$

dla wszystkich $f \in \ell^r(\mathbb{Z})$.

Dowód Twierdzenia 4.31 opiera się w dużym stopniu na ideach Bourgaina zapoczątkowanych w [4], [5] i [6], odsyłamy również do [56, 57, 85]. Jednak metoda łuków Hardyego i Littlewooda (będąca jednym z głównych narzędzi w podejściu Bourgaina) okazała się być nieodpowiednia w tym miejscu. Zamiast tego zauważyliśmy, że

$$\|M_{\mathbf{P}_h} f\|_{\ell^r(\mathbb{Z})} \leqslant C\big(\|M_{\mathbf{P}} f\|_{\ell^r(\mathbb{Z})} + \|\sup_{N\in\mathbb{N}} |(M_{\mathbf{P}_h,2^N} - M_{\mathbf{P},2^N})f\|_{\ell^r(\mathbb{Z})}\big).$$

Korzystając z rezultatów Bourgaina–Wierdla [6, 85] oraz Naira [56, 57] nasz problem został zredukowany do oszacowania funkcji maksymalnej związanej z błędem. Pracując po stronie transformaty Fouriera pokazaliśmy, że $\|M_{\mathbf{P}_h,2^N} - M_{\mathbf{P},2^N}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})\mapsto\ell^2(\mathbb{Z})} = O(2^{-\delta N})$ dla pewnego $\delta > 0$. Aby uzasadnić to malenie, musieliśmy wykorzystać następującą nierówność:

Lemat 4.33 (Van der Corput [81], [21], [36])**.** *Przypuśćmy, że* $N \geqslant 1$*,* $k \geqslant 2$ *są całkowite oraz* $a \leqslant b \leqslant a+N$*,* $b-a \geqslant 1$*. Niech* $F \in \mathcal{C}^k([a,b])$ *będzie funkcją rzeczywistą*

$$\eta \lesssim |F^{(k)}(x)| \lesssim r\eta, \ \ \text{dla każdego} \ \ x \in [a,b],$$

przy pewnym $\eta > 0$ *i* $r \geqslant 1$*. Wtedy*

$$\Big|\sum_{a \leqslant n \leqslant b} e^{2\pi i F(n)}\Big| \lesssim rN\left(\eta^{1/(2^k-2)} + N^{-2/2^k} + (N^k\eta)^{-2/2^k}\right), \tag{4.34}$$

gdzie stała w nierówności jest uniwersalna.

Powyższy lemat został użyty zamiast nierówności Weyla (4.15) do oszacowania sum eksponencjalnych związanych z transformatą Fouriera operatorów $M_{\mathbf{P}_h,2^N} - M_{\mathbf{P},2^N}$.

Twierdzenie 4.31 z nierównością oscylacyjną doprowadziło nas, dzięki zasadzie transferencji, do następującego uogólnienia Twierdzenia 4.21.

Twierdzenie 4.35 (**[H1]**, Theorem 1.5)**.** *Niech* $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ *będzie układem dynamicznym. Niech* $W : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ *będzie wielomianem stopnia* $q \in \mathbb{N}$*. Załóżmy, że* $h \in \mathcal{F}_c$ *dla* $c \in [1, c_q)$*. Wtedy dla każdej funkcji* $f \in L^r(X, \mu)$*, gdzie* $r > 1$*, średnie ergodyczne*

$$A_{h,N}f(x) = \frac{1}{\pi_h(N)} \sum_{p \in \mathbf{P}_{h,N}} f(T^{W(p)}x), \ \ \text{dla} \ \ x \in X, \tag{4.36}$$

zbiegają μ*-prawie wszędzie na* X*.*

W drugiej części pracy **[H1]** pokazaliśmy, że trójkowy problem Goldbacha ma rozwiązanie w liczbach pierwszych z $\mathbf{P}_h$.

Twierdzenie 4.37 (**[H1]**, Theorem 1.6)**.** *Niech* $0 < \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \leqslant 1$ *będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi*

$$\begin{aligned} 16(1-\gamma_1) + 14(1-\gamma_2) + 14(1-\gamma_3) < 1,\\ 16(1-\gamma_2) + 14(1-\gamma_1) + 14(1-\gamma_3) < 1,\\ 16(1-\gamma_3) + 14(1-\gamma_1) + 14(1-\gamma_2) < 1. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Załóżmy, że $h_1 \in \mathcal{F}_{1/\gamma_1}$*,* $h_2 \in \mathcal{F}_{1/\gamma_2}$*,* $h_3 \in \mathcal{F}_{1/\gamma_3}$ *oraz niech* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *oznaczają odpowiednio funkcje odwrotne do nich. Wtedy istnieje stała* $C(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) > 0$ *taka, że* $R(N)$*, która jest ilością reprezentacji liczby nieparzystej* $N \in \mathbb{N}$ *jako sumy trzech liczb pierwszych* $p_i \in \mathbf{P}_{h_i}$*, gdzie* $i = 1, 2, 3$ *spełnia*

$$R(N) = \sum_{\substack{p_1+p_2+p_3=N \\ p_i \in \mathbf{P}_{h_i,N}}} 1 \geqslant C(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \cdot \frac{\mathfrak{S}(N)\varphi_1(N)\varphi_2(N)\varphi_3(N)}{N \ \log^3 N}, \tag{4.39}$$

dla dostatecznie dużych $N \in \mathbb{N}$*, gdzie*

$$\mathfrak{S}(N) = \prod_{p \in \mathbf{P}} (1 - \frac{1}{(p-1)^3}) \prod_{p | N} (1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}) > 0,$$

jest szeregiem osobliwym z trójkowego problemu Goldbacha.

W szczególności (4.39) oznacza, że każda dostatecznie duża nieparzysta liczba naturalna może zostać zapisana jako suma trzech liczb pierwszych $p_i \in \mathbf{P}_{h_i}$, gdzie $i = 1, 2, 3$. Balog i Friedlander [1] i Kumchev [46] rozwiązali trójkowy problem Goldbacha w liczbach pierwszych Piatetskiego–Shapiro. Tutaj uogólniliśmy rezultat Baloga i Friedlandera oraz Kumcheva do ogólniejszych zbiorów $\mathbf{P}_h$ dla $h \in \mathcal{F}_c$ kosztem bardziej restrykcyjnych warunków na $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ w (4.38). Dowód twierdzenia 4.37 jest kombinacją metod Heatha–Browna [27] z oryginalnymi pomysłami Vinogradova [58].

4.3.6. *Roth's Theorem in the Piatetski–Shapiro primes* **[H2]**. Rezultaty tej pracy są motywowane pewnymi zagadnieniami z kombinatoryki addytywnej.

Niech A będzie podzbiorem liczb naturalnych, dla każdego $N \in \mathbb{N}$ definiujemy gęstość $\triangle_A(N)$ zbioru A jako $\triangle_A(N) = \frac{1}{N}|A \cap [1, N]|$, a następnie definiujemy górną gęstość zbioru A jako $\bar{\triangle}(A) = \limsup_{N \to \infty} \triangle_A(N)$. Mówimy, że zbiór A zawiera postęp arytmetyczny długości trzy, jeśli istnieje $a \in A$ oraz $d \neq 0$ takie, że $a, a+d, a+2d \in A$.

W 1953 Roth [70] udowodnił, że każdy podzbiór $\mathbb{N}$ mający dodatnią górną gęstość zawiera nieskończenie wiele postępów arytmetycznych długości trzy.

Tego samego typu pytania dotyczą również podzbiorów liczb naturalnych mających znikającą górną gęstość. Tutaj zbiór liczb pierwszych $\mathbf{P}$ jest naturalnym kandydatem, zwłaszcza w świetle twierdzenia Van der Corputa [80], gdzie pokazano, że zbiór liczb pierwszych $\mathbf{P}$ zawiera nieskończenie wiele postępów arytmetycznych długości trzy. Niedawno doczekaliśmy się uogólnienia twierdzenia Rotha i Van der Corputa dla zbioru liczb pierwszych. Mianowicie, Green [22] pokazał, że każdy podzbiór $A \subseteq \mathbf{P}$ o dodatniej relatywnej górnej gęstości, tzn. $\limsup_{N\to\infty} \frac{|A\cap[1,N]|}{|\mathbf{P}\cap[1,N]|} > 0$ zawiera nietrywialne postępy arytmetyczne długości trzy. Prawie w tym samym czasie Green i Tao [24] udowodnili odpowiednik twierdzenia Szemerédiego [76] dla zbioru liczb pierwszych. A dokładniej, pokazali istnienie dowolnie długich postępów arytmetycznych w podzbiorach liczb pierwszych mających niezerową relatywną górną gęstość.

Mimo tego, że obecnie wiemy dość dużo o arytmetycznej strukturze zbioru liczb pierwszych, to niewiele wiadomo dla zbioru liczb pierwszych Piatetskiego–Shapiro $\mathbf{P}_\gamma$ ustalonego typu $\gamma < 1$ (gdzie γ jest dostatecznie bliskie 1)

$$\mathbf{P}_\gamma = \{p \in \mathbf{P} : \exists_{n\in\mathbb{N}}\, p = \lfloor n^{1/\gamma} \rfloor\}.$$

Ponadto dość łatwo zauważyć, że ani twierdzenie Greena [22], ani twierdzenie Greena i Tao [24] nie rozstrzyga czy zbiór $\mathbf{P}_\gamma$ zawiera nietrywialne postępy arytmetyczne o długości co najmniej trzy, ponieważ $\mathbf{P}_\gamma$ ma zerową gęstość w zbiorze $\mathbf{P}$.

Będąc zmotywowani tą obserwacją udowodniliśmy odpowiednik twierdzenia Rotha dla liczb pierwszych Piatetskiego–Shapiro.

Twierdzenie 4.40 (**[H2]**, Theorem 1.1)**.** *Załóżmy, że $\gamma \in (71/72, 1)$, wtedy każdy $A \subseteq \mathbf{P}_\gamma$ z dodatnią górną relatywną gęstością, tzn. $\limsup_{N\to\infty} \frac{|A\cap[1,N]|}{|\mathbf{P}_\gamma\cap[1,N]|} > 0$ zawiera nietrywialne postępy arytmetyczne o długości trzy.*

Twierdzenie 4.40 wynika ze znacznie ogólniejszego Twierdzenia 4.41, gdzie ogólniejsze podzbiory liczb pierwszych były badane. Mianowicie zbiory postaci

$$\mathbf{P}_h = \{p \in \mathbf{P} : \exists_{n\in\mathbb{N}}\, p = \lfloor h(n) \rfloor\},$$

gdzie h jest funkcją jak w Definicji 4.25. Nasz główny rezultat w **[H2]** jest następujący:

Twierdzenie 4.41 (**[H2]**, Theorem 1.7). *Załóżmy, że $c \in [1, 72/71)$, $h \in \mathcal{F}_c$. Wtedy każdy $A \subseteq \mathbf{P}_h$ z dodatnią górną relatywną gęstością, tzn. $\limsup_{N\to\infty} \frac{|A\cap[1,N]|}{|\mathbf{P}_h\cap[1,N]|} > 0$ zawiera nietrywialne postępy arytmetyczne o długości trzy.*

Biorąc $h(x) = x^{1/\gamma}$ i $\gamma \in (71/72, 1)$ w powyższym twierdzeniu otrzymujemy Twierdzenie 4.40.

Uwaga 4.42. *Wszystkie rezultaty w tej części pozostają prawdziwe jeśli założymy, że $h \in \mathcal{C}^3([x_0,\infty))$ i $\vartheta \in \mathcal{C}^2([x_0,\infty))$ w Definicji 4.25 rodziny $\mathcal{F}_c$. Ponadto jeśli $c > 1$ wystarczy zastąpić warunek* (4.27) *przez*

$$\lim_{x\to\infty} \vartheta(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} x\vartheta'(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} x^2\vartheta''(x) = 0, \tag{4.43}$$

natomiast, dla $c = 1$ wystarczy zastąpić warunek (4.29) *przez*

$$\lim_{x\to\infty} \vartheta(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\vartheta''(x)}{\vartheta(x)} = 0. \tag{4.44}$$

Głównym narzędziem w dowodzie jest tak zwana nierówność majoryzująca Hardyego–Littlewooda dla zbioru $\mathbf{P}_h$. Mianowicie.

Twierdzenie 4.45 (**[H2]**, Theorem 1.8)**.** *Załóżmy, że $c \in [1, 16/15)$, $\gamma = 1/c$, $h \in \mathcal{F}_c$. Przypuśćmy, że $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem liczb zespolonych takim, że $|a_n| \leqslant 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy dla każdego $r > \frac{26-24\gamma}{16\gamma-15}$ istnieje stała $C_{r,\gamma} > 0$ taka, że nierówność*

$$\Big\| \sum_{p\in\mathbf{P}_{h,N}} a_p e^{2\pi i p\xi} \Big\|_{L^r(\mathbb{T},d\xi)} \leqslant C_{r,\gamma} \Big\| \sum_{p\in\mathbf{P}_{h,N}} e^{2\pi i p\xi} \Big\|_{L^r(\mathbb{T},d\xi)}, \tag{4.46}$$

zachodzi jednostajnie ze względu na $N \in \mathbb{N}$.

Nierówność (4.46) została udowodniona przez Bourgaina [3] dla liczb pierwszych $\mathbf{P}$, a później ponownie odkryta przez Greena [22] w kontekście postępów arytmetycznych. Można myśleć, że nierówność (4.46) jest dyskretną wersją nierówności restrykcyjnej dla zbioru $\mathbf{P}_\gamma$. Jej dowód jest również oparty na argumencie TT^* podobnie jak w nierówności restrykcyjnej Tomasa–Steina.

Strategia dowodu Twierdzenia 4.45 jest bardzo prosta. Wystarczyło zredukować szacowania dla $p \in \mathbf{P}_{h,N}$ w Twierdzeniu 4.45 do szacowań dla $p \in \mathbf{P}_N = \mathbf{P} \cap [1, N]$ i użyć rezultatu Greena [22]. Wtedy nasze zadanie zostało sprowadzone do zrozumienia błędu pomiędzy odpowiednimi sumami. W tym celu musieliśmy udowodnić następujący:

Lemat 4.47 (**[H2]**, Lemma 1.10)**.** *Niech $c \in [1, 16/15)$, $h \in \mathcal{F}_c$, φ będzie funkcją odwrotną do h i $\gamma = 1/c$. Niech $s \in \mathbb{N}$ i $0 \leqslant a \leqslant s-1$ będą takie, że $(a,s) = 1$. Jeśli $\chi > 0$ spełnia $16(1-\gamma)+28\chi < 1$, to istnieje $\chi' > 0$ takie, że dla każdego $N \in \mathbb{N}$ i dla każdego $\xi \in [0,1]$ mamy*

$$\sum_{\substack{p\in\mathbf{P}_{h,N}\\ p\equiv a (\mathrm{mod}\, s)}} \varphi'(p)^{-1} \log p\, e^{2\pi i\xi p} = \sum_{\substack{p\in\mathbf{P}_{N}\\ p\equiv a (\mathrm{mod}\, s)}} \log p\, e^{2\pi i\xi p} + O(N^{1-\chi-\chi'}). \tag{4.48}$$

Stałe są niezależne od ξ i $N \in \mathbb{N}$.

Druga suma w (4.48) reprezentuje część, która została pokryta przez twierdzenie Greena [22]. Malenie w błędzie pomiędzy sumami w (4.48) wyznacza warunek $r > \frac{26-24\gamma}{16\gamma-15}$ w Twierdzeniu 4.45. W dowodzie Lematu 4.47 nie używaliśmy metody łuków Hardyego i Littlewooda, która była głównym narzędziem w pracy Greena. To jest spowodowane przez całkowicie inną naturę naszego problemu. W naszym problemie użyliśmy nierówności Van der Corputa do oszacowania odpowiednich sum eksponencjalnych, zamiast nierówności Weyla–Vinogradova. To jest wymuszone przez niewielomianowy charakter funkcji należących do rodziny $\mathcal{F}_c$. Dowód Lematu 4.47 jest połączeniem metod rozwiniętych przez Heatha–Browna [27] z technikami ze standardowego dowodu nierówności Vinogradova z trójkowego problemu Goldbacha [21], [58].

4.3.7. *Weak type $(1,1)$ inequalities for discrete rough maximal functions* **[H3]**. Twierdzenie maksymalne Bourgaina [6] mówi, że dla $p > 1$ i wszystkich funkcji $f \in \ell^p(\mathbb{Z})$ funkcja maksymalna

$$\mathcal{M}^a_{\mathrm{dis}} f(x) = \sup_{N\in\mathbb{N}} \frac{1}{N}\Big|\sum_{n=1}^{N} f(x-a_n)\Big|, \quad \text{dla } x \in \mathbb{Z}, \tag{4.49}$$

jest ograniczona na $\ell^p(\mathbb{Z})$ dla dowolnego $a_n = P(n)$, gdzie P jest wielomianem całkowitoliczbowym.

Szacowania w $p = 1$ dla funkcji maksymalnej $\mathcal{M}^a_{\mathrm{dis}}$ wzdłuż kwadratów pozostawały nieznane przez ponad 20 lat aż do ostatnich wyników Buczolicha i Mauldina [11] i LaVictoirea [50]. Pokazali oni, że punktowe twierdzenie ergodyczne dla średnich wzdłuż $P(n) = n^k$ dla $k \geqslant 2$ nie jest prawdziwe na L^1. To było jedno z najtrudniejszych pytań w punktowej teorii ergodycznej, które przyciągało uwagę wielu specjalistów. W 1991 to pytanie zmotywowało Rosenblatta i Wierdla [69] do sformułowania hipotezy, że nie ma ciągów $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ z rozbieżnymi lukami tzn.

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \infty,$$

dla których funkcja maksymalna $\mathcal{M}^a_{\mathrm{dis}}$ jest słabego typu $(1,1)$.

W 2007, Buczolich [10] oraz Urban i Zienkiewicz [79] pokazali, niezależnie, że hipoteza Rosenblatta–Wierdla jest fałszywa. W [79] udowodniono, że funkcja maksymalna (4.49) jest słabego typu $(1,1)$ dla $a_n = \lfloor n^c \rfloor$, gdzie $1 < c < 1.001$. LaVictoire [49] i Christ [14] również dostarczyli wiele przykładów ciągów $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o gęstości Banacha 0, dla których funkcja maksymalna $\mathcal{M}^a_{\mathrm{dis}}$ jest słabego typu $(1,1)$. W międzyczasie, teoria $\ell^p(\mathbb{Z})$ dla $p > 1$ była rozwijana w [2] dla ciągów $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ postaci $a_n = \lfloor h(n) \rfloor$, gdzie h jest odpowiednią funkcją z ciała Hardyego[7]. Jednak pytanie o szacowania, dla $p = 1$, dla ciągów modelowanych na funkcjach z ciała Hardyego pozostało otwarte, aż do momentu [79].

W **[H3]** udało nam się scharakteryzować te funkcje h dla których funkcja maksymalna (4.49) jest słabego typu $(1,1)$. Pokazaliśmy, że dla ciągu $a_n = \lfloor h(n) \rfloor$, gdzie $h(x) = x^c L(x)$ przy $c \in (1, 30/29)$ i $L(x)$ będącej odpowiednią funkcją wolnozmieniającą się, funkcja maksymalna $\mathcal{M}^a_{\mathrm{dis}}$ jest słabego typu $(1,1)$. A dokładniej h jest jak w Definicji 4.50.

[7] Ciało Hardyego jest to ciało funkcji zamkniętych na różniczkowanie funkcji nieskończenie wiele razy.

Definicja 4.50. *Dla* $c \in (1,2)$ *niech* $\mathcal{F}_c$ *będzie rodziną funkcji* $h : [x_0, \infty) \mapsto [1, \infty)$ *(dla pewnego* $x_0 \geqslant 1$*) spełniającą następujące warunki*

(i) $h \in \mathcal{C}^3([x_0, \infty))$ *oraz*

$$h'(x) > 0, \quad h''(x) > 0, \ \textit{dla każdego } \ x \geqslant x_0.$$

(ii) *Istnieje funkcja* $\vartheta \in \mathcal{C}^3([x_0, \infty))$ *i stała* $C_h > 0$ *taka, że*

$$h(x) = C_h x^c \ell_h(x), \ \textit{gdzie } \ \ell_h(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{\vartheta(t)}{t} dt}, \ \textit{dla każdego } \ x \geqslant x_0. \tag{4.51}$$

Ponadto

$$\lim_{x \to \infty} \vartheta(x) = 0, \ \lim_{x \to \infty} x\vartheta'(x) = 0, \ \lim_{x \to \infty} x^2 \vartheta''(x) = 0 \ \lim_{x \to \infty} x^3 \vartheta'''(x) = 0. \tag{4.52}$$

Zdecydowaliśmy się przeformułować definicję rodziny $\mathcal{F}_c$, aby podkreślić, że pracujemy z funkcjami $h, \vartheta \in \mathcal{C}^3([x_0, \infty))$ oraz $c > 1$, zamiast z funkcjami $\mathcal{C}^\infty$ i $c \geqslant 1$.

Niech $\mathbf{N}_h = \{\lfloor h(m) \rfloor : m \in \mathbb{N}\}$, gdzie $h \in \mathcal{F}_c$. Nasz główny rezultat w **[H3]** jest następujący:

Twierdzenie 4.53 (**[H3]**, Theorem 1.7)**.** *Załóżmy, że* $c \in (1, 30/29)$ *i* $h \in \mathcal{F}_c$*. Zdefiniujmy dla* $x \in \mathbb{Z}$ *funkcję maksymalną*

$$\mathcal{M}_h f(x) = \sup_{N \in \mathbb{N}} |M_{h,N} f(x)|, \tag{4.54}$$

związaną z operatorami średniującymi

$$M_{h,N} f(x) = \frac{1}{|\mathbf{N}_h \cap [1, N]|} \sum_{n \in \mathbf{N}_h \cap [1,N]} f(x - n). \tag{4.55}$$

Wtedy istnieje stała $C > 0$ *taka, że dla każdego* $f \in \ell^1(\mathbb{Z})$*, mamy*

$$\|\mathcal{M}_h f\|_{\ell^{1,\infty}(\mathbb{Z})} \leqslant C \|f\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}. \tag{4.56}$$

W szczególności $\mathcal{M}_h f$ *jest ograniczona na* $\ell^p(\mathbb{Z})$ *dla każdego* $f \in \ell^p(\mathbb{Z})$ *i wszystkich* $p > 1$.

Dowód Twierdzenia 4.53 opiera się na dość subtelnej wersji rozkładu Calderóna–Zygmunda, wymyślonej przez Feffermana [18], a później rozwiniętej przez Christa [15] do badania funkcji maksymalnych. Idee Feffermana okazały się być użyteczne w teorii dyskretnej [79], jak również w [49] i [14]. Krótko mówiąc, słaby typ $(1, 1)$ dla $\mathcal{M}_h f$ jest uzyskany dzięki rozkładowi Calderóna–Zygmunda, faktowi, że na $\ell^2(\mathbb{Z})$ mamy $\langle M_{h,N} f, M_{h,N} g \rangle = \langle M_{h,N}^* M_{h,N} f, g \rangle$, oraz możliwości rozłożenia jądra związanego z operatorem $M_{h,N}^* M_{h,N}$[8] na prostsze części; deltę w 0, pewną funkcję wolno-malejącą, oraz funkcję błędu którą kontrolujemy używając lematu Van der Corputa (4.34).

Nasze motywacje do studiowania takich funkcji maksymalnych były spowodowane częściowo faktem, że niezbyt wiele było wiadomo o strukturze funkcji h dla których $\mathcal{M}_h f$ jest słabego typu $(1, 1)$. Rodzina $\mathcal{F}_c$ ożywiła dyskusję, na ten temat, rozpoczętą w [2] i rzuciła nowe światło na teorię L^1 i punktowe twierdzenia ergodyczne, które nie były tam rozważane. Warto podkreślić, że postać funkcji z $\mathcal{F}_c$ powoduje pewne trudności, które nie występowały w [79]. Musieliśmy kompletnie zmienić metodę aproksymacji jądra związanego z operatorem $M_{h,N}^* M_{h,N}$ w stosunku do metody z [79] i to jest ważna nowa idea w **[H3]**. Tamto podejście jest nieadekwatne w naszej sytuacji ponieważ prowadzi do studiowania sum eksponencjalnych z dość skomplikowaną funkcją fazową i to jest przyczyna dlaczego my preferujemy rozważać zbiory $\mathbf{N}_h \cap [1, N]$ w (4.55) zamiast $\{\lfloor h(m) \rfloor : m \in [1, N]\}$.

Tutaj warto wspomnieć, że nasza metoda nie rozstrzyga przypadku $c = 1$. Warto byłoby dowiedzieć się, na przykład, czy $\mathcal{M}_h f$ jest słabego typu $(1, 1)$ dla $h(x) = x \log x$. Jednak, jeśli chodzi o ograniczoność na $\ell^p(\mathbb{Z})$ funkcji maksymalnej $\mathcal{M}_h f$ dla $p > 1$, można ją uzyskać dla wszystkich funkcji $h \in \mathcal{F}_c$ pod warunkiem, że $c \in [1, 4/3)$. Tutaj dla $c = 1$ warunek (4.52) z Definicji 4.50 musi zostać zmodyfikowany w następujący sposób.

Uwaga 4.57. *Jeśli* $c = 1$*, to dodatkowo zakładamy, że* $\vartheta(x)$ *jest dodatnia, malejąca i dla wszystkich* $\varepsilon > 0$ *mamy*

$$\frac{1}{\vartheta(x)} \lesssim_\varepsilon x^\varepsilon, \ \textit{i} \ \lim_{x \to \infty} \frac{x}{h(x)} = 0. \tag{4.58}$$

---

[8]gdzie $M_{h,N}^*$ oznacza operator sprzężony do $M_{h,N}$.

Ponadto

$$\lim_{x\to\infty}\vartheta(x)=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{x\vartheta'(x)}{\vartheta(x)}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\vartheta''(x)}{\vartheta(x)}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\vartheta'''(x)}{\vartheta(x)}=0. \tag{4.59}$$

Z jednej strony nasza metoda dostarcza nowej metody w porównaniu do technik rozwiniętych w [2] które pozwalają badać ograniczoność na L^p średnich ergodycznych. Z drugiej strony, warto wspomnieć, że niektóre rezultaty na L^p dla $p > 1$ są zupełnie nowe ze względu na fakt, że istnieją funkcje $h \in \mathcal{F}_c$ które nie należą do ciała Hardyego i nie były poruszane w [2].

Twierdzenie 4.53 jest głównym narzędziem w dowodzie następującego punktowego twierdzenia ergodycznego.

Twierdzenie 4.60 (**[H3]**, Theorem 1.14). *Załóżmy, że $c \in (1, 30/29)$ i $h \in \mathcal{F}_c$. Niech $(X, \mathcal{B}(X), \mu, T)$ będzie układem dynamicznym. Wtedy dla każdego $f \in L^p(X, \mu)$, gdzie $p \geqslant 1$, średnie ergodyczne*

$$A_{h,N}f(x)=\frac{1}{|\mathbf{N}_h\cap[1,N]|}\sum_{n\in\mathbf{N}_h\cap[1,N]}f(T^nx),\quad dla\ \ x\in X, \tag{4.61}$$

zbiegają μ-prawie wszędzie na X.

4.3.8. *Cotlar's ergodic theorem along the prime numbers* **[H4]**. Niech $(X, \mathcal{B}, \mu, S)$ będzie układem dynamicznym z odwracalnym i zachowującym miarę przekształceniem $S : X \to X$. W 1955 Cotlar [13] pokazał punktową zbieżność przyciętych ergodycznych transformat Hilberta

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{1\leqslant|n|\leqslant N}\frac{f(S^nx)}{n},$$

dla wszystkich $f \in L^r(\mu)$ z $1 \leqslant r < \infty$. W **[H4]** otrzymaliśmy analogiczny wynik dla liczb pierwszych $\mathbf{P}$. Niech $\mathbf{P}_N = \mathbf{P} \cap (1, N]$. Mianowicie.

Twierdzenie 4.62 (**[H4]**, Theorem 1). *Niech $(X, \mathcal{B}, \mu, S)$ będzie układem dynamicznym. Wtedy dla wszystkich $f \in L^r(\mu)$ z $1 < r < \infty$ istnieje granica*

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{p\in\pm\mathbf{P}_N}\frac{f(S^px)}{p}\log|p|,$$

μ-prawie wszędzie na X.

Dzięki zasadzie transferencji, wystarczy rozważać dyskretną całkę singularną z jądrem Calderóna–Zygmunda $K \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ spełniającym warunek

$$|x||K(x)|+|x|^2|K'(x)|\leqslant 1, \tag{4.63}$$

dla $|x| \geqslant 1$, wraz z warunkiem skracań

$$\sup_{\lambda\geqslant 1}\bigg|\int_{1\leqslant|x|\leqslant\lambda}K(x)dx\bigg|\leqslant 1, \tag{4.64}$$

Całka singularna T wzdłuż zbioru liczb pierwszych jest zdefiniowana, dla funkcji o nośniku skończonym $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, jako

$$Tf(n)=\sum_{p\in\pm\mathbf{P}}f(n-p)K(p)\log|p|.$$

Niech T_N będzie przycięciem operatora T

$$T_Nf(n)=\sum_{p\in\pm\mathbf{P}_N}f(n-p)K(p)\log|p|.$$

Funkcja maksymalna związana z przyciętymi całkami singularnymi wzdłuż zbioru liczb pierwszych $\mathbf{P}$ była głównym obiektem naszych badań w **[H4]**. Udowodniliśmy następujące:

Twierdzenie 4.65 (**[H4]**, Theorem 2). *Funkcja maksymalna*

$$T^*f(n)=\sup_{N\in\mathbb{N}}|T_Nf(n)|,$$

jest ograniczona na $\ell^r(\mathbb{Z})$ dla dowolnego $1 < r < \infty$. Ponadto istnieje granica $\lim_{N\to\infty} T_N f(n)$, i jest równa transformacie Hilberta Tf, która również jest ograniczona na $\ell^r(\mathbb{Z})$ dla dowolnego $1 < r < \infty$.

Według naszej wiedzy to był pierwszy dyskretny wynik takiego typu dotyczący ograniczoności funkcji maksymalnej związanej z przyciętymi całkami singularnymi modelowanymi na zbiorze liczb pierwszych. Dla $r = 2$, dowód Twierdzenia 4.65 jest oparty na metodzie łuków Hardyego–Littlewooda. Jednak nierówność Weyla została zastąpiona nierównością Vinogradova.

Twierdzenie 4.66 (Nierówność Vinogradova)**.** *Niech $\xi \in [0,1]$ będzie takie, że*

$$\Big|\xi - \frac{a}{q}\Big| \leqslant \frac{1}{q^2},$$

dla pewnych $1 \leqslant a \leqslant q$, $q \in \mathbb{N}$ z $(a,q) = 1$. Wtedy istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego $N \in \mathbb{N}$ mamy

$$\Big|\sum_{p \in \mathbf{P} \cap [1,N]} e^{2\pi i \xi p}\Big| \leqslant C \log^4 N \big(N q^{-1/2} + N^{4/5} + q^{1/2} N^{1/2}\big). \tag{4.67}$$

Ta nierówność była również kluczowa w dowodzie trójkowego problemu Goldbacha. Ta idea została wymyślona przez Bourgaina ([4, 5, 6]) w kontekście punktowych twierdzeń ergodycznych wzdłuż wielomianów całkowitoliczbowych. Dla $r \neq 2$, na początku chcieliśmy adaptować elegancki argument Wierdla [85] oparty na pewnej szczególnej własności, którą posiadają liczby pierwsze. Jednak, okazało się, że argument w [85] jest niekompletny. Zamiast tego zaproponowaliśmy inną metodę, która naprawia dowód Wierdla, a zarazem istotnie upraszcza oryginalny dowód Bourgaina.

Warto wspomnieć, że Twierdzenie 4.65 rozszerza rezultat Ionescu i Waingera [35] do zbioru liczb pierwszych. Tutaj odsyłamy, aby porównać z Twierdzeniem 4.18. Jednak, nasze podejście jest zupełnie inne, ponieważ my rozważamy funkcje maksymalne związane z przyciętymi całkami singularnymi, które są znacznie bardziej skomplikowanymi obiektami do badania. Ponadto byliśmy w stanie zdefiniować całkę singularną (jak i ergodyczną całkę singularną) jako punktową granicę jej przycięć.

4.3.9. *Discrete maximal functions in higher dimensions and applications to ergodic theory* **[H5]**. Tak jak już wspominaliśmy wcześniej Bourgain uogólnił punktowe twierdzenie ergodyczne Birkhoffa, pokazując, że dla dowolnego układu dynamicznego $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ na σ-skończonej przestrzeni miarowej X z odwracalnym przekształceniem zachowującym miarę T średnie wzdłuż kwadratów

$$A_N f(x) = N^{-1} \sum_{n=1}^{N} f(T^{n^2} x),$$

zbiegają μ-prawie wszędzie na X dla wszystkich $f \in L^p(X,\mu)$ z $p > 1$, (odsyłamy do [4, 5]). Niedługo po tym w [6], kwadraty zostały zastąpione przez dowolne wielomiany całkowitoliczbowe. Ograniczenie na zakres parametrów $p > 1$ w twierdzeniu Bourgaina jest istotne. Ostatnio, Buczolich i Mauldin [11] pokazali, że zbieżność punktowa $A_N f$ nie zachodzi na $L^1(X,\mu)$ (odsyłamy również do [50]).

W **[H5]** badaliśmy szacowania na $L^p(X,\mu)$ dla dyskretnych wielowymiarowych operatorów średniujących i ich zastosowania do punktowych twierdzeń ergodycznych.

Mianowicie, niech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ będzie σ-skończoną przestrzenią miarową z rodziną odwracalnych, komutujących przekształceń zachowujących miarę $S_1, S_2, \ldots, S_d$ dla pewnego $d \in \mathbb{N}$. Niech $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_d) : \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^d$ oznacza przekształcenie wielomianowe takie, że $\mathcal{P}_j$ jest wielomianem całkowitoliczbowym na $\mathbb{Z}^k$, gdzie $\mathcal{P}_j(0) = 0$. Zdefiniujmy średnie

$$A_N^{\mathcal{P}} f(x) = N^{-k} \sum_{n \in \mathbb{N}_N^k} f\big(S_1^{\mathcal{P}_1(n)} S_2^{\mathcal{P}_2(n)} \cdot \ldots \cdot S_d^{\mathcal{P}_d(n)} x\big), \tag{4.68}$$

gdzie $\mathbb{N}_N^k = \{1, 2, \ldots, N\}^k$. Jednym z naszych głównych rezultatów w **[H5]** jest następujące:

Twierdzenie 4.69 (**[H5]**, Theorem A)**.** *Załóżmy, że $p \in (1, \infty)$. Wtedy dla każdego $f \in L^p(X,\mu)$ istnieje $f^* \in L^p(X,\mu)$ taka, że*

$$\lim_{N \to \infty} A_N^{\mathcal{P}} f(x) = f^*(x),$$

μ-prawie wszędzie na X.

Klasyczne podejście do badania punktowej zbieżności wymaga ograniczoności na $L^p(X,\mu)$ funkcji maksymalnej, dzięki której wystarczy znaleźć gęstą klasę funkcji z $L^p(X,\mu)$ na której zachodzi zbieżność punktowa. Jednak w wielu przypadkach znalezienie takiej gęstej klasy jest bardzo trudnym zadaniem, zwłaszcza w problemach z teorii ergodycznej. To na przykład miało miejsce w przypadku operatora średniującego Bourgaina wzdłuż wielomianów całkowitoliczbowych stopnia co najmniej 2. Bourgain ominął tę trudność dla operatorów $\mathcal{A}_N^{\mathcal{P}}$, w jednowymiarowym przypadku $k=d=1$, kontrolując ich półnormę oscylacyjną. Mianowicie niech $(n_j : j\in\mathbb{N})$ będzie ciągiem lakunarnym (tzn. $n_{j+1}>2n_j$), wtedy półnorma oscylująca dla ciągu $\big(a_n(x) : n\in\mathbb{N}\big)$ funkcji o wartościach zespolonych jest zdefiniowana następująco

$$O_J\big(a_n(x) : n\in\mathbb{N}\big) = \Big(\sum_{j=1}^{J} \sup_{n_j\leqslant n<n_{j+1}} \big|a_n(x)-a_{n_j}(x)\big|^2\Big)^{1/2}.$$

Bourgain wywnioskował zbieżność punktową na $L^2(X,\mu)$ dla operatorów $\mathcal{A}_N^{\mathcal{P}}$ dowodząc, że istnieją stałe $C>0$ i $c<1/2$ takie, że dla wszystkich $J\in\mathbb{N}$ mamy

$$\big\|O_J\big(\mathcal{A}_N^{\mathcal{P}} f : N\in\mathbb{N}\big)\big\|_{L^2} \leqslant CJ^c\|f\|_{L^2}.$$

Inną możliwością, również zaproponowaną przez Bourgaina [6], aby poradzić sobie z tą trudnością, jest kontrolowanie półnormy r-wariacyjnej, która jest bardziej uniwersalnym narzędziem do badania punktowej zbieżności. Przypomnijmy, że dla $r\geqslant 1$ półnormę r-wariacyjną V_r dla ciągu $\big(a_n(x) : n\in\mathbb{N}\big)$ funkcji o wartościach zespolonych definiujemy następująco

$$V_r\big(a_n(x) : n\in\mathbb{N}\big) = \sup_{J\in\mathbb{N}} \sup_{k_0<\ldots<k_J} \left(\sum_{j=0}^{J} |a_{k_{j+1}}(x)-a_{k_j}(x)|^r\right)^{1/r}.$$

Korzyści z badania półnorm r-wariacyjnych, dla $r<\infty$, są następujące.

- Po pierwsze dla dowolnego ciągu $\big(a_n(x) : n\in\mathbb{N}\big)$, jeśli
$$V_r\big(a_n(x) : n\in\mathbb{N}\big) < \infty$$
to ciąg $\big(a_n(x) : n\in\mathbb{N}\big)$ jest ciągiem Cauchyego i istnieje granica
$$\lim_{n\to\infty} a_n(x).$$
- Po drugie, półnorma r-wariacyjna kontroluje normę supremum. A dokładniej dla $m\in\mathbb{N}$, mamy punktowe szacowanie
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n(x)| \leqslant |a_m(x)| + 2V_r\big(a_n(x) : n\in\mathbb{N}\big).$$
- Po trzecie, dla każdego $r>2$, z nierówności Höldera, mamy
$$O_J\big(a_n(x) : n\in\mathbb{N}\big) \leqslant J^{1/2-1/r} V_r\big(a_n(x) : n\in\mathbb{N}\big).$$

To uzasadnia użyteczność półnorm r-wariacyjnych w badaniu problemów punktowej zbieżności.

W **[H5]** byliśmy w stanie wywnioskować Twierdzenie 4.69 z dużo ogólniejszego rezultatu:

Twierdzenie 4.70 (**[H5]**, Theorem B). *Niech* $p\in(1,\infty)$ *i* $r>\max\{p, p/(p-1)\}$. *Wtedy istnieje stała* $C_{p,r}>0$ *taka, że dla każdej funkcji* $f\in L^p(X,\mu)$

$$\big\|V_r\big(A_N^{\mathcal{P}} f : N\in\mathbb{N}\big)\big\|_{L^p} \leqslant C_{p,r}\|f\|_{L^p}. \tag{4.71}$$

Ponadto stała $C_{p,r}$ *jest niezależna od współczynników wielomianu* $\mathcal{P}$.

W świetle wielowymiarowego wariantu zasady transferencji Calderóna wystarczyło pracować na $\mathbb{Z}^d$ zamiast na abstrakcyjnej przestrzeni miarowej X. Wtedy definiując średnie

$$M_N^{\mathcal{P}} f(x) = N^{-k} \sum_{y\in\mathbb{N}_N^k} f\big(x-\mathcal{P}(y)\big), \tag{4.72}$$

dla dowolnej funkcji $f:\mathbb{Z}^d\to\mathbb{C}$ o nośniku skończonym, wystarczyło udowodnić:

Twierdzenie 4.73 (**[H5]**, Theorem C)**.** *Niech $p \in (1, \infty)$ i $r > \max\{p, p/(p-1)\}$. Wtedy istnieje stała $C_{p,r} > 0$ taka, że dla każdej funkcji $f \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$ mamy*

$$\big\|V_r\big(M_N^{\mathcal{P}} f : N \in \mathbb{N}\big)\big\|_{\ell^p} \leqslant C_{p,r}\|f\|_{\ell^p}. \tag{4.74}$$

Ponadto stała $C_{p,r}$ jest niezależna od współczynników wielomianu $\mathcal{P}$.

Twierdzenie 4.73 jest głównym rezultatem w **[H5]**, które uogólnia jednowymiarowy rezultat Krausego [44]. Dowód w istotny sposób odwołuje się do wyników dla funkcji maksymalnej związanej z $M_N^{\mathcal{P}}$. Mianowicie do Twierdzenia 4.75, które jest wielowymiarowym odpowiednikiem maksymalnego twierdzenia Bourgaina [6].

Twierdzenie 4.75 (**[H5]**, Theorem D)**.** *Niech $p \in (1, \infty]$, wtedy istnieje stała $C_p > 0$ taka, że dla każdej funkcji $f \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$ mamy*

$$\big\|\sup_{N\in\mathbb{N}} |M_N^{\mathcal{P}} f|\big\|_{\ell^p} \leqslant C_p\|f\|_{\ell^p}. \tag{4.76}$$

Ponadto stała C_p jest niezależna od współczynników wielomianu $\mathcal{P}$.

Prace Bourgaina [4, 5, 6] zapoczątkowały dość szerokie badania zarówno w punktowej teorii ergodycznej [2, 31, 33, 44, 85] jak i w dyskretnych odpowiednikach klasycznych operatorów [33, 32, 34, 35, 54, 55, 60, 64, 65, 66, 72, 73, 74, 75]. Wariacyjne nierówności w analizie harmonicznej i teorii ergodycznej były tematem wielu prac [38, 39, 44, 62, 87] warto też zwrócić uwagę na referencje w tych pracach, jak również na prace [59, 61].

Nasze motywacje do badania punktowej zbieżności operatorów średniujących w (4.68) były zainspirowane pracą Ionescu, Magyara, Steina i Waingera [33]. W której rozważane były zbieżności punktowe pewnych niekomutatywnych wariantów operatorów średniujących modelowanych na przekształceniach wielomianowych stopnia co najwyżej 2. Potrzeba zrozumienia ograniczenia nałożonego na stopień wielomianów w [33], doprowadziła nas, w szczególności, do Twierdzenia 4.73 i Twierdzenia 4.75. Ponadto ostatnia praca Krausego [44] zainspirowała nas do badania norm wariacyjnych w wielu wymiarach — Twierdzenie 4.73 — które z kolei doprowadziło do nowego argumentu uzasadniającego zbieżność punktową w stosunku do argumentów użytych w [33].

Nasz cel w **[H5]**, w stosunku do wcześniejszych prac, był następujący. Po pierwsze, chcieliśmy osłabić założenia nałożone na stopień wielomianu w [33]. Po drugie, interesowały nas szacowania wariacyjne, a po trzecie, dostaliśmy szacowania w (4.74) i (4.76) jednostajne ze względu na współczynniki przekształceń wielomianowych.

Ten fakt, a dokładniej szacowania jednostajne w (4.76) pozwoliły nam myśleć o wieloparametrowych dyskretnych operatorach całek singularnych i funkcjach maksymalnych. Ostatnio wraz z Jimem Wrightem rozważaliśmy pewną dwuparametrową funkcję maksymalną i pokazaliśmy:

Twierdzenie 4.77. *Niech $P : \mathbb{Z}^2 \mapsto \mathbb{Z}$ będzie wielomianem. Dla $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ definiujemy funkcję maksymalną*

$$\mathcal{M}f(x,y,z) = \sup_{M,N\in\mathbb{N}} \Big|\frac{1}{M}\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} f(x-m, y-n, z-P(m,n))\Big|.$$

Wtedy dla każdego $1 < p \leqslant \infty$, istnieje stała $C_p > 0$ taka, że dla wszystkich $f \in \ell^p(\mathbb{Z}^3)$ mamy

$$\|\mathcal{M}f\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} \leqslant C_p\|f\|_{\ell^p(\mathbb{Z})}. \tag{4.78}$$

W dowodzie Twierdzenia 4.77 musieliśmy wiele razy uzasadnić, że funkcja

$$\mathbb{Z} \ni x \mapsto \sup_{N\in\mathbb{N}} \Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x-m, y-n, z-P(m,n))\Big|,$$

jest ograniczona na $\ell^p(\mathbb{Z})$ jednostajnie ze względu na $m \in [1, M]$, i jednostajna nierówność z (4.76) była nieoceniona.

Nierówność (4.76) odegrała również ważną rolę w jednoparametrowej teorii, na przykład była dość istotna w projekcie ze Steinem i Trojanem dotyczącym ograniczoności na ℓ^p dla funkcji maksymalnej związanej z przyciętymi transformatami Radona. Mianowicie w **[A3]** pokazaliśmy, że dla każdego $p \in (1, \infty)$ istnieje $C_p > 0$ taka, że zachodzi następująca nierówność

$$\| \sup_{N \in \mathbb{N}} |T_N^{\mathcal{P}} f(x)| \|_{\ell^p} \leqslant C_p \|f\|_{\ell^p}, \tag{4.79}$$

gdzie $T_N^{\mathcal{P}} f$ jest przyciętą transformatą Radona modelowaną na $\mathcal{P}$,

$$T_N^{\mathcal{P}} f(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}_N^k \setminus \{0\}} f(x - \mathcal{P}(y)) K(y),$$

gdzie K jest jądrem Calderóna–Zygmunda na $\mathbb{R}^k$, a $\mathbb{Z}_N^k = \{-N, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N\}^k$. W dowodzie nierówności (4.79) musieliśmy zastąpić supremum po zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$ przez supremum po zbiorze liczb diadycznych $\{2^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Ponieważ operatory $T_N^{\mathcal{P}}$ nie są dodatnie musieliśmy być dość ostrożni, na szczęście dla $N \in [2^n, 2^{n+1})$ zachodzi następujące punktowe szacowanie

$$|T_N^{\mathcal{P}} f(x)| \leqslant C\big(|T_{2^n}^{\mathcal{P}} f(x)| + M_N^{\mathcal{P}} |f|(x)\big),$$

dla pewnej stałej $C > 0$.

Dowód Twierdzenia 4.75 jest oparty na pomyśle Ionescu i Waingera [35], gdzie pokazano ograniczoność na ℓ^p dyskretnej transformaty Radona przez rozłożenie wyjściowego operatora na dwie części, pierwszą kontrolowalną w ℓ^p i drugą kontrolowalną w ℓ^2. Mówiąc dokładniej już w kontekście naszego operatora, dla każdego $\epsilon \in (0, 1]$ i $\lambda > 0$ byliśmy w stanie znaleźć operator $A_N^{\lambda, \epsilon}$ taki, że

$$\| \sup_{N \in \mathbb{N}} |M_N^{\mathcal{P}} f - A_N^{\lambda, \epsilon} f| \|_{\ell^2} \leqslant D_\epsilon \lambda^{-1} \|f\|_{\ell^2},$$

i dla wszystkich $p \in (1, \infty)$

$$\| \sup_{N \in \mathbb{N}} |A_N^{\lambda, \epsilon} f| \|_{\ell^p} \leqslant C_\epsilon \lambda^{\epsilon} \|f\|_{\ell^p}.$$

Z pomocą tych dwóch oszacowań i pewnej techniki interpolacyjnej z [35] pokazaliśmy (4.76). Używając tego pomysłu w naszej sytuacji zbudowaliśmy zupełnie nową teorię ℓ^2 i ℓ^p w stosunku do teorii Bourgaina [6] czy Ionescu, Magyara, Steina i Waingera [33]. Ponieważ półnorma r-wariacyjna kontroluje normę supremum dla każdego $r \geqslant 1$, wystarczyło jedynie badać półnormę r-wariacyjną na ℓ^2. Teoria ℓ^2 dla operatorów średniujących wzdłuż wielomianów w [6] została oparta, w głównej mierze, na metodzie łuków Hardyego i Littlewooda oraz na lemacie logarytmicznym Bourgaina (odsyłamy do [6], również do [47]).

Lemat Bourgaina. *Załóżmy, że $\lambda_1 < \ldots < \lambda_K \in \mathbb{R}$ oraz dla każdego $j \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy otoczenia*

$$\mathcal{R}_j = \{\xi \in \mathbb{R} : \min_{1 \leqslant k \leqslant K} |\xi - \lambda_k| \leqslant 2^{-j}\}.$$

Wtedy istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$\Big\| \sup_{j \in \mathbb{N}} \Big| \int_{\mathcal{R}_j} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \Big| \Big\|_{L^2(dx)} \leqslant C (\log K)^2 \|f\|_{L^2},$$

dla każdej funkcji $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Mimo tego, że lemat Bourgaina jest interesujący sam w sobie, i okazał się być bardzo użytecznym narzędziem w problemach dyskretnych, to znalazł on ogromne zastosowanie w analizie time-frequency (odsyłamy do [17, 48, 78]). Ostatnio, Nazarov, Oberlin i Thiele [59] wprowadzili tzw. "multi-frequency" rozkład Calderóna–Zygmunda i uogólnili lemat Bourgaina na przestrzenie L^p. Ponadto dostarczyli również szacowań wariacyjnych (warto również zobaczyć [61]). Alternatywny dowód i pewne modyfikacje pracy [59] zostały zaprezentowane przez Krausego w [45], a później wykorzystane przez niego do szacowań wariacyjnych dla jednowymiarowego operatora średniującego Bourgaina w [44].

Tutaj zaproponowaliśmy zupełnie inne, nowe podejście. Nasz główny pomysł opiera się na elementarnej nierówności numerycznej

$$V_r\big(a_j : 0 \leqslant j \leqslant 2^s\big) \leqslant \sqrt{2} \sum_{i=0}^{s} \bigg(\sum_{j=0}^{2^{s-i}-1} \Big| a_{(j+1)2^i} - a_{j2^i} \Big|^2 \bigg)^{1/2} \tag{4.80}$$

dla półnorm r-wariacyjnych dla ciągu $\big(a_j : 0 \leqslant j \leqslant 2^s\big)$. Ta nierówność pozwoliła nam bezpośrednio analizować mnożniki przybliżające bez odwoływania się do lematów typu logarytmicznego Bourgaina.

Strategia dowodu ograniczoności na ℓ^p jest dość łatwa. Porównaliśmy dyskretną normę $\|\cdot\|_{\ell^p}$ naszych mnożników przybliżających z ciągłą normą $\|\cdot\|_{L^p}$ pewnych mnożników o których, a priori, wiemy, że są ograniczone na L^p. Jednak to tylko daje dobre szacowania kiedy rozważamy duże skale ze względu na parametr N, który jest dobrany do λ z rozkładu Ionescu–Waingera. Ta idea w połączeniu z techniką inetrpolacyjną Ionescu–Waingera nie była badana w tym kontekście i daje nowy dowód ograniczoności na ℓ^p dla dużych kostek.

Małe kostki są załatwione przez pewną restrykcyjną nierówność maksymalną, która jest ograniczona na ℓ^p z logarytmiczną stratą w normie (4.72). Jest to oryginalny pomysł Bourgaina [6], który pozwolił mu uzyskać ograniczoność na ℓ^p dla pełnego zakresu $p > 1$. My adaptowaliśmy tutaj ten pomysł do sytuacji wielowymiarowej podając troszkę inny dowód tego faktu, zarazem uzyskując dowód Twierdzenia 4.75. Na koniec mając udowodnione Twierdzenie 4.75 dla wszystkich $1 < p \leqslant \infty$ i Twierdzenie 4.73 dla $p = 2$ i wszystkich $2 < r < \infty$ wykorzystaliśmy argument interpolacyjny Krausego i otrzymaliśmy Twierdzenie 4.73 dla wszystkich $1 < p < \infty$ i $r > \max\{p, p/(p-1)\}$.

5. Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

5.1. **Analiza harmoniczna i dyskretna analiza harmoniczna.** Prace **[A1]–[A4]** i **[B1]–[B3]**.

5.1.1. *Dyskretne operatory typu Radona i ich zastosowania do teorii ergodycznej* **[A1]**, **[A2]**, **[A3]** *i* **[B2]**. W **[A1]**, **[A2]** i **[A3]** wspólnie ze Steinem i Trojanem zbudowaliśmy dyskretny odpowiednik teorii funkcji kwadratowej Littlewooda–Paley. Według naszej wiedzy jest to pierwsza taka konstrukcja w dyskretnej analizie harmonicznej. Pytanie o istnienie takiej teorii było jednym z najważniejszych pytań w tej dziedzinie, które przyciągało uwagę specjalistów od ponad 25 lat. Nasza metoda okazała się być bardzo silnym narzędziem, pozwalającym studiować wiele dyskretnych operatorów.

Niech $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_d) : \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^d$ będzie przekształceniem wielomianowym jak w poprzednim podrozdziale. Ponadto załóżmy, że $K \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^k \setminus \{0\})$ jest jądrem Calderóna–Zygmunda spełniającym

$$|y|^k |K(y)| + |y|^{k+1} |\nabla K(y)| \leqslant 1 \tag{5.1}$$

dla wszystkich $y \in \mathbb{R}^k$ z $|y| \geqslant 1$ oraz warunek skracań

$$\sup_{\lambda \geqslant 1} \Big| \int_{1 \leqslant |y| \leqslant \lambda} K(y) \mathrm{d}y \Big| \leqslant 1. \tag{5.2}$$

Dla funkcji $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ o skończonym nośniku, definiujemy przycięte transformaty Radona

$$T_N^{\mathcal{P}} f(x) = \sum_{y \in \mathbb{B}_N \setminus \{0\}} f\big(x - \mathcal{P}(y)\big) K(y), \tag{5.3}$$

gdzie $\mathbb{B}_N = \{y \in \mathbb{Z}^k : |y| \leqslant N\}$. W **[A3]** udowodniliśmy, że dla każdego $p > 1$ istnieje stała $C_p > 0$ taka, że dla każdej funkcji $f \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$, mamy

$$\| \sup_{N \in \mathbb{N}} |T_N^{\mathcal{P}} f| \|_{\ell^p} \leqslant C_p \|f\|_{\ell^p}. \tag{5.4}$$

Nierówność (5.4) natychmiastowo implikuje twierdzenie Ionescu i Waingera [35], które daje ograniczoność na $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ dla $p > 1$ dyskretnej singularnej transformaty Radona

$$T^{\mathcal{P}} f(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}} f\big(x - \mathcal{P}(y)\big) K(y).$$

Pomimo obszernych studiów w dyskretnej analizie harmonicznej, funkcje maksymalne związane z operatorami $T_N^{\mathcal{P}}$ nie były w ogóle badane. W szczególności, w **[A3]** udowodniliśmy dużo więcej, i nierówność (4.76) z poprzedniego podrozdziału oraz (5.4) wynikają z szacowań wektorowo-wartościowych:

Twierdzenie 5.5. *Dla każdego $1 < p < \infty$ istnieje stała $C_p > 0$ taka, że dla wszystkich $(f_t : t \in \mathbb{N}) \in \ell^p(\ell^2(\mathbb{Z}^d))$, mamy*[9]

$$\Big\| \Big(\sum_{t \in \mathbb{N}} \sup_{N \in \mathbb{N}} |M_N^{\mathcal{P}} f_t|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{\ell^p} + \Big\| \Big(\sum_{t \in \mathbb{N}} \sup_{N \in \mathbb{N}} |T_N^{\mathcal{P}} f_t|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{\ell^p} \leqslant C_p \Big\| \Big(\sum_{t \in \mathbb{N}} |f_t|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{\ell^p}. \tag{5.6}$$

Ponadto stała C_p jest niezależna od współczynników wielomianu $\mathcal{P}$.

[9] $\ell^p\big(\ell^2(\mathbb{Z}^d)\big) = \Big\{ (f_t : t \in \mathbb{N}) : \Big\| \big(\sum_{t \in \mathbb{N}} |f_t|^2 \big)^{1/2} \Big\|_{\ell^p} < \infty \Big\}$ dla wszystkich $1 \leqslant p < \infty$.

Nasze podejście zaowocowało jednolitą teorią, która z jednej strony pozwala wydedukować maksymalne rezultaty Bourgaina [4, 5, 6], z drugiej strony twierdzenie Ionescu i Waingera dla dyskretnej transformaty Radona [35]. Ponadto dostaliśmy jednostajne szacowania ze względu na współczynniki wielomianu oraz wielowymiarowy odpowiednik twierdzenia maksymalnego Bourgaina z zupełnie nowym dowodem.

Operatory (5.3) mają również interpretację ergodyczną. Jeśli rozważymy operatory

$$\mathcal{H}_N^{\mathcal{P}} f(x) = \sum_{y \in \mathbb{B}_N^k \setminus \{0\}} f\big(S_1^{\mathcal{P}_1(y)} S_2^{\mathcal{P}_2(y)} \cdot \ldots \cdot S_d^{\mathcal{P}_d(y)} x\big) K(y) \tag{5.7}$$

na odpowiedniej przestrzeni miarowej $(X, \mathcal{B}, \mu)$ z odpowiednią rodziną przekształceń zachowujących miarę $S_1, S_2, \ldots, S_d$ to widzimy, że operatory $\mathcal{H}_N^{\mathcal{P}}$ pokrywają się z operatorami $T_N^{\mathcal{P}}$ odpowiednio[10]. W **[A2]** udowodniliśmy następujące:

Twierdzenie 5.8. *Niech $p > 1$, wtedy dla każdej funkcji $f \in L^p(X, \mu)$ istnieje $f^* \in L^p(X, \mu)$ takie, że*

$$\lim_{N \to \infty} \mathcal{H}_N^{\mathcal{P}} f(x) = f^*(x) \tag{5.9}$$

μ-prawie wszędzie na X.

Twierdzenie 5.8 z $\mathcal{H}_N^{\mathcal{P}}$ może być uważane za uogólnienie twierdzenia ergodycznego Cotlara [13], które mówi, że granica

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{0 < |n| \leqslant N} \frac{f(S^n x)}{n}$$

istnieje μ-prawie wszędzie na X dla każdej funkcji $f \in L^p(X, \mu)$ z $p > 1$.

Odwołując się do wariantu zasady transferencji Calderóna Twierdzenie 5.8 można wywnioskować z następującego:

Twierdzenie 5.10. *Dla każdego $p > 1$ oraz $r > 2$ istnieje stała $C_p > 0$ taka, że dla wszystkich funkcji $f \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$, mamy*

$$\big\|V_r(M_N^{\mathcal{P}} f : N \in \mathbb{N})\big\|_{\ell^p} + \big\|V_r(T_N^{\mathcal{P}} f : N \in \mathbb{N})\big\|_{\ell^p} \leqslant C_p \frac{r}{r-2} \|f\|_{\ell^p}. \tag{5.11}$$

Ponadto stała C_p jest niezależna od współczynników wielomianu $\mathcal{P}$.

Twierdzenie 5.10 daje optymalny zakres parametrów $r > 2$ rozszerzając wynik z Twierdzenia 4.73 dla operatorów $M_N^{\mathcal{P}}$ z poprzedniego podrozdziału, które dawało zakres $r > \max\{p, p/(p-1)\}$. W dowodzie nasza konstrukcja dyskretnej teorii Littlewooda–Paley była nieoceniona. Ponadto metody z **[A2]** dają nowe dowody rezultatów z **[B2]**.

5.1.2. *Dwuparametrowa wersja lematu logarytmicznego Bourgaina* **[A4]**. W [6] Bourgain pokazał, że jeśli $\Gamma \subseteq \mathbb{R}$ jest skończonym zbiorem częstotliwości, spełniającym warunek separowania, tzn. dla każdego $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, jeśli $\gamma_1 \neq \gamma_2$, to $|\gamma_1 - \gamma_2| \geqslant 1$. Wtedy istnieje stała $C > 0$ taka, że dla wszystkich $f \in L^2(\mathbb{R})$ mamy

$$\Big\| \sup_{n \in \mathbb{N}} \Big| \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}^{-1}\big(\mathbf{1}_{A_n^\gamma} \mathcal{F} f\big) \Big| \Big\|_{L^2(dx)} \leqslant C\big(\log |\Gamma|\big)^2 \|f\|_{L^2},$$

gdzie $\mathcal{F}$ oznacza transformatę Fouriera na $\mathbb{R}$, $A_n^\gamma = \gamma + A_n$ oraz $A_n = (-2^{-n-1}, 2^{-n-1})$ dla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ta nierówność odegrała fundamentalną rolę w dowodzie punktowego twierdzenia ergodycznego wzdłuż kwadratów dla funkcji z $\ell^2(\mathbb{Z})$. Później Lacey [48] pokazał jej użyteczność w problemach z analizy time-frequency.

W **[A4]** wspólnie z Krause i Trojanem potrafimy udowodnić jej dwuparametrowy wariant. Mianowicie, jeśli Λ jest skończonym podzbiorem $Q_1^{-1}\mathbb{Z} \times Q_2^{-1}\mathbb{Z}$, dla pewnych $Q_1, Q_2 \in \mathbb{N}$ spełniającym warunek separowalności, wtedy istnieje stała $C > 0$ taka, że dla wszystkich $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$

$$\Big\| \sup_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}} \Big| \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}^{-1}\big(\mathbf{1}_{R_{n_1,n_2}^\lambda} \mathcal{F} f\big) \Big| \Big\|_{L^2} \leqslant C \log\log\big(Q_1\sqrt{|\Lambda|}\big) \cdot \log\log\big(Q_2\sqrt{|\Lambda|}\big) \|f\|_{L^2},$$

[10]Wystarczy wziąć $X = \mathbb{Z}^d$, $\mathcal{B} = \mathbf{P}(\mathbb{Z}^d)$ σ-algebrę wszystkich podzbiorów $\mathbb{Z}^d$, $\mu = |\cdot|$ miarę liczącą na $\mathbb{Z}^d$ oraz $S_j^y : \mathbb{Z}^d \mapsto \mathbb{Z}^d$ operator przesunięcia na j-tej współrzędnej, tzn. $S_j^y(x_1, \ldots, x_d) = (x_1, \ldots, x_j - y, \ldots, x_d)$ dla $j = 1, 2, \ldots, d$ i $y \in \mathbb{Z}$.

gdzie $R^{\lambda}_{n_1,n_2} = \lambda + A_{n_1} \times A_{n_2}$ oraz $\mathcal{F}$ jest transformatą Fouriera na $\mathbb{R}^2$. Jest to ważna nierówność w świetle ostatnich badań z Jimem Wrightem dotyczących ograniczoności na $\ell^p(\mathbb{Z}^3)$ dla $p > 1$ dyskretnych dwuparametrowych funkcji maksymalnych. Odsyłamy do Twierdzenia 4.77.

5.1.3. *Hipoteza Hardy–Littlewooda* **[B3]**. W 1935 roku Hardy i Littlewood w [26] sformułowali następującą hipotezę, że dla każdego $p \geqslant 2$ istnieje stała $\mathbf{C}_p > 0$ taka, że dla każdego zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ i każdego ciągu $(a_n : n \in A) \subseteq \mathbb{C}$ spełniającego $\sup_{n\in A} |a_n| \leqslant 1$, mamy

$$\Big\| \sum_{n\in A\cap[1,N]} a_n e^{2\pi i n\xi} \Big\|_{L^p(\mathbb{T},d\xi)} \leqslant \mathbf{C}_p \Big\| \sum_{n\in A\cap[1,N]} e^{2\pi i n\xi} \Big\|_{L^p(\mathbb{T},d\xi)}.$$

Używając twierdzenia Plancherela, dość łatwo pokazać, że ta nierówność jest spełniona dla wszystkich parzystych $p \in \mathbb{N}$. Jednak nie było wiadomo co z pozostałymi p? W latach siedemdziesiątych pokazano, że hipoteza Hardyego i Littlewooda jest fałszywa. Z drugiej strony w 2005 Green [22] udowodnił, że nierówność Hardyego i Littlewooda zachodzi dla zbioru liczb pierwszych. W **[B3]** wraz z Krause i Trojanem konstruujemy pewną szeroką klasę zbiorów dla których ta hipoteza zachodzi. Mianowicie rozważamy zbiory postaci $\{n \in \mathbb{N} : \{\varphi(n)\} < \psi(n)\}$, gdzie $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są odpowiednio odwrotnościami funkcji $x^c L_1(x)$ dla $c \in [1, 2]$ i $xL_2(x)$, a $L_1(x), L_2(x)$ są pewnymi funkcjami wolnozmieniającymi się. Jest to ważna nierówność w analizie harmonicznej i teorii liczb, ponieważ z jednej strony, jeśli jest prawdziwa dla pewnego $p \in (2, 3)$, to można wykazać, że w zbiorze A istnieje nieskończenie wiele postępów arytmetycznych długości co najmniej trzy. Z drugiej strony, jeśli udałoby się pokazać jej prawdziwość dla tak zwanych zbiorów restrykcyjnych, to wtedy natychmiastowo implikuje ona pełną hipotezę restrykcji i problem Kakeyi — dwa bardzo trudne, nierozwiązane, problemy w analizie harmonicznej.

5.1.4. *Wieloliniowe lokalne twierdzenie* $T(b)$. W **[B1]** wspólnie z Thiele udowodniliśmy pierwsze lokalne wieloliniowe twierdzenie $T(b)$ dla doskonałych jąder Calderóna–Zygmunda. Mówimy, że operator jest doskonałym operatorem Calderóna–Zygmunda, jesli jego jądro jest stałe na każdej kostce diadycznej, która nie przecina przekątnej. Twierdzenia $T(b)$ dostarczają narzędzi w teorii operatorów singularnych, które pozwalają weryfikować ograniczoność tych operatorów na L^p dla $p > 1$. Do tej pory były znane jedynie wieloliniowe twierdzenia $T(1)$. Jednak w zastosowaniach testowanie ograniczoności operatorów wieloliniowych na funkcjach stale równych 1 często bywa bardzo trudne i dlatego tak ważna jest możliwość testowania ich ograniczoności na szerszej klasie funkcji. Nasze wieloliniowe lokalne twierdzenie $T(b)$ różni się od wcześniej rozważanych lokalnych twierdzeń $T(b)$ przez to, że udało nam się sformułować naturalne i łatwe do sprawdzenia, konieczne i dostateczne, warunki na ogólne funkcje b. Według naszej wiedzy te warunki nie były wcześniej znane w literaturze i są konieczne dla naszego podejścia.

5.2. **Teoria prawdopodobieństwa.** Prace **[B4]**–**[B9]**. Artykuły **[B5]**, **[B8]** i **[B9]** stanowiły moją rozprawę doktorską.

5.3. **Rekursje stochastyczne [B5], [B6], [B8], [B9].** Rekursją stochastyczną nazywamy ciąg postaci $X^x_n = \psi_n(X^x_{n-1})$, dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $X^x_0 = x \in \mathbb{R}^d$, oraz $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem (i.i.d.) przekształceń Lipschitzowskich przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^d$ w siebie, ze stałą Lipschitz'a $L_n < \infty$. Macierzowa rekursja afiniczna $X^x_n = \psi_n(X^x_{n-1}) = M_n X^x_{n-1} + Q_n \in \mathbb{R}^d$, gdzie $(M_n, Q_n) \in \mathrm{Gl}(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d$ jest chyba najlepiej znanym przykładem rekursji stochastycznej, [7, 9, 19, 20, 44]. Mówimy, że $(X^x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma rozwiązanie stacjonarne S o rozkładzie ν, jeśli $S =_d \psi_1(S)$, gdzie $=_d$ oznacza równość według rozkładu.

Teraz możemy sformułować jedno z najważniejszych pytań dla rekursji stochastycznych. Mianowicie, czy istnieje $\alpha > 0$ dla której rozwiązanie stacjonarne ν rekursji $(X^x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma ciężki ogon z wykładnikiem $\alpha > 0$, a dokładniej, czy poniższa granica

$$\lim_{t\to\infty} t^{\alpha}\nu(\{x \in \mathbb{R}^d : |x| > t\}) = C > 0, \quad \text{istnieje i czy jest dodatnia?}$$

W ostatnim czasie ten problem był badany przez wielu autorów w kontekście różnych ciekawych rekursji, [9, 44]. Nam udało się wprowadzić warunki, które pozwalają badać ten problem dla ogólnych rekursji Lipschitzowskich przy warunku Craméra. Dzięki tym warunkom uzyskuje się szeroką klasę rekursji mających własność ciężkiego ogona. Ponadto należy podkreślić, że nasze warunki pozwalają (co jest dość wygodne i wcześniej nie było możliwe) uniezależnić się od konkretnych wzorów.

Założenia ([B8]). *Dla* $t > 0$*, niech* $\psi_{n,t} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ *będzie zdefiniowane następująco* $\psi_{n,t}(x) = t\psi_n(t^{-1}x)$*, gdzie* $x \in \mathbb{R}^d$.

1. *Istnieje odwzorowanie* $\overline{\psi}_n : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ *takie, że* $\lim_{t\to 0} \psi_{n,t}(x) = \overline{\psi}_n(x)$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}^d$ *i* $\overline{\psi}_n(x) = M_n x$ *dla każdego* $x \in \operatorname{supp} \nu$. *Zmienna losowa* M_n *o rozkładzie* $\overline{\mu}$ *przyjmuje swoje wartości w* $G = \mathbb{R}_+^* \times K$, *gdzie* K *jest domkniętą podgrupą grupy ortogonalnej* $O(\mathbb{R}^d)$.
2. *Istnieje zmienna losowa* N_n *taka, że* ψ_n *spełnia* $|\psi_n(x) - M_n x| \leqslant |N_n|$, *dla każdego* $x \in \mathbb{R}^d$.

Niech $\kappa(s) = \mathbb{E}|M_n|^s$ *dla* $s \in [0, s_\infty)$, *gdzie* $s_\infty = \sup\{s \in \mathbb{R}_+ : \kappa(s) < \infty\}$. *Zakładamy, że* G *jest najmniejszą domkniętą półgrupą generowaną przez* $\operatorname{supp}\overline{\mu}$.

3. M_n *spełnia warunek Craméra z wykładnikiem* $\alpha > 0$, *tzn. istnieje* $\alpha \in (0, s_\infty)$ *takie, że* $\kappa(\alpha) = \mathbb{E}(|M_n|^\alpha) = 1$.
4. *Rozkład warunkowy* $\log |M_n|$, *pod warunkiem, że* $M_n \neq 0$ *jest niearytmetyczny. Ponadto mamy* $\mathbb{E}(|M_n|^\alpha |\log |M_n||) < \infty$, $\mathbb{E}(|N_n|^\alpha) < \infty$, *i* $L_n \leqslant |M_n|$.

W **[B8]**, przy powyższych założeniach, udowodniliśmy, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie stacjonarne S o rozkładzie ν dla rekursji $(X_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$, ponadto istnieje jedyna miara Radona Λ na $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ taka, że $\lim_{g\in G, |g|\to 0} |g|^{-\alpha} \mathbb{E} f(gS) = \Lambda(f)$, dla odpowiednich funkcji f. Mając dodatkowe założenia momentów umiemy wykazać, że Λ jest niezerowa. W szczególności dostajemy, że ν ma ciężki ogon z wykładnikiem $\alpha > 0$. Jeśli $\alpha \in (0, 2]$, to wyżej wymieniony rezultat ma bardzo głębokie konsekwencje. Mianowicie w **[B8]**, pokazaliśmy (rozszerzając wyniki z [7] dla iteracji afinicznych), że istnieją ciągi $(a_{n,\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ i $(d_{n,\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ dla których zmienne losowe $1/a_{n,\alpha} \sum_{k=1}^n X_n^x - d_{n,\alpha}$ zbiegają słabo do rozkładu α-stabilnego. To twierdzenie jest szczególnie ważne w rachunku prawdopodobieństwa, ponieważ z jednej strony rekursje stochastyczne są ważną klasą łańcuchów Markowa, z drugiej strony dostajemy α-stabilne twierdzenie graniczne dla zależnych zmiennych losowych $(X_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$. Dowód tego twierdzenia jest dość skomplikowany i ściśle analityczny, ale okazał się być na tyle ogólny, że znalazł aplikacje w innych sytuacjach **[B6], [B7]**.

5.4. **Uogólnione wielowymiarowe równanie afiniczne [B4], [B5].** Niech Γ będzie multiplikatywną podpółgrupą grupy $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^d)$ złożoną z macierzy o wyrazach nieujemnych takich, że w każdej kolumnie i w każdym wierszu znajduje się co najmniej jeden wyraz dodatni.

Niech A będzie Γ–wartościową macierzą losową, będziemy rozważać uogólnione wielowymiarowe równanie afiniczne (uwra) $R =_d \sum_1^N A_i R_i + B$, gdzie $N \geqslant 2$ jest ustaloną liczbą naturalną, $A_1, \ldots, A_N$ są niezależnymi kopiami A, $B \in \mathbb{R}^d$ jest wektorem losowym o wyrazach nieujemnych, a $R_1 \ldots, R_N$ są niezależnymi kopiami $R \in \mathbb{R}^d$, o wyrazach nieujemnych. Ponadto wszystkie zmienne losowe są niezależne. Ostatnio w **[B5]**, (będąc motywowani rezultatami z [8]), używając metod spektralnych Guivarc'ha i Le Pagea [19, 20] oraz twierdzenia odnowy Kestena [41], pokazaliśmy, że przy pewnych dodatkowych założeniach, istnieje wykładnik $\chi > 0$, taki że granica $\lim_{t\to\infty} t^\chi \mathbb{P}(\{\langle R, u\rangle > t\}) = C_\chi(u) \geqslant 0$, istnieje dla każdego $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ o wyrazach nieujemnych. Ponadto jeśli $\chi \geqslant 1$, to $C_\chi(u) > 0$.

Jednowymiarowa wersja równania (uwra) była badana przez Jelenkovića i Olvera–Cravioto [37] w kontekście algorytmu Google PageRank. Aby dowiedzieć się więcej o algorytmie Google PageRank warto odwiedzić stronę `http://en.wikipedia.org/wiki/PageRank`.

LITERATURA

[1] A. BALOG, J. P. FRIEDLANDER. A hybrid of theorems of Vinogradov and Piatetski–Shapiro. *Pacific J. Math.* **156**, (1992), 45–62.

[2] M.BOSHERNITZAN, G. KOLESNIK, A. QUAS, M. WIERDL. Ergodic averaging sequences. *J. d'Analyse Math.* **95**, (2005) no. 1, 63–103.

[3] J. BOURGAIN. On $\Lambda(p)$ - subsets of squares. *Israel J. Math.* **67**, (1989), no. 3, 291–311.

[4] J. BOURGAIN. On the maximal ergodic theorem for certain subsets of the integers. *Israel J. Math.* **61**, (1988), 39–72.

[5] J. BOURGAIN. On the pointwise ergodic theorem on L^p for arithmetic sets. *Israel J. Math.* **61**, (1988), 73–84.

[6] J. BOURGAIN. Pointwise ergodic theorems for arithmetic sets, with an appendix by the author, H. Furstenberg, Y. Katznelson, and D. S. Ornstein. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **69** (1989), 5–45.

[7] D. BURACZEWSKI, E. DAMEK, Y. GUIVARC'H. Convergence to stable laws for a class multidimensional stochastic recursions. *Accepted for publication in Probability Theory and Related Fields (2009).*

[8] D. BURACZEWSKI, E. DAMEK, Y. GUIVARC'H. On multidimensional Mandelbrot's cascades. *Preprint (2011).*

[9] D. BURACZEWSKI, E. DAMEK, Y. GUIVARC'H, A. HULANICKI, R. URBAN. Tail-homogeneity of stationary measures for some multidimensional stochastic recursions. *Probab. Th. and Rel. Fields (2009)* ***145*** *385–420.*

[10] Z. BUCZOLICH. Universally L^1 good sequences with gaps tending to infinity. *Acta Math. Hungar.* **117**, (2007), no. 1–2, 91—140.

[11] Z. BUCZOLICH, R. D. MAULDIN. Divergent square averages. *Ann. Math.* **171**, (2010), no. 3, 1479–1530.

[12] A. P. CALDERÓN, A. ZYGMUND. On the existence of certain singular integrals. *Acta Math. 88 (1952), 85—139.*
[13] M. COTLAR. A unified theory of Hilbert transforms and ergodic theorems. *Rev. Mat. Cuyana **1**, (1955), no. 2, 105–167.*
[14] M. CHRIST. A weak type (1, 1) inequality for maximal averages over certain sparse sequences. Preprint (2011).
[15] M. CHRIST. Weak type (1, 1) bounds for rough operators. *Ann. of Math.* (2) **128**, (1988), no. 1, 19—42.
[16] C. DEMETER. On some maximal multipliers in L^p. *Rev. Mat. Iberoam.* **26**, (2010), no. 3, 947–964.
[17] C. DEMETER, M. T. LACEY, T. TAO, CH. THIELE. Breaking the duality in the return times theorem. *Duke Math. J.* **143**, (2008), no. 2, 281–355.
[18] C. FEFFERMAN. Inequalities for strongly singular convolution operators. *Acta Math.* **124**, (1970), 9—36.
[19] Y. GUIVARC'H, É. LE PAGE. Simplicité de spectres de Lyapounov et propriété d'isolation spectrale pour une famille d'opérateurs de transfert sur l'espace projectif. *Random walks and geometry.* (2004) Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin. 181–259.
[20] Y. GUIVARC'H, É. LE PAGE. On matricial renewal theorems and tails of stationary measures for affine stochastic recursions. *Preprint (2011).*
[21] S. W. GRAHAM, G. KOLESNIK. Van der Corput's method of exponential sums. *London Mathematical Society Lecture Note Series, 126, Cambridge University Press, Cambridge, (1991).*
[22] B. GREEN. Roth's theorem in the primes. *Ann. of Math.* **161**, (2005), no. 3, 1609–1636.
[23] B. GREEN, T. TAO. Restriction theory of the Selberg sieve, with applications. *J. Théor. Nombres Bordeaux,* **18**, (2006), 147–182.
[24] B. GREEN, T. TAO. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. *Ann. of Math.* **167**, (2008), no. 2, 481–547.
[25] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD A maximal theorem with function-theoretic applications. *Acta Mathematica,* **51**, (1930), no. 1, 81–116.
[26] G.H. HARDY AND J.E. LITTLEWOOD Notes on the theory of series (XIX): A problem concerning majorants of Fourier series. *Q. J. Math. (1935), no. 1, 304–315.*
[27] D. R. HEATH–BROWN. The Pjateckii–Sapiro prime number theorem. *J. Number Theory,* **16**, (1983), 242–266.
[28] H. A. HELFGOTT. Minor arcs for Goldbach's problem. *Preprint*, arXiv:1205.5252, (2013).
[29] H. A. HELFGOTT. Major arcs for Goldbach's theorem. *Preprint*, arXiv:1305.2897, (2013).
[30] H. A. HELFGOTT. The ternary Goldbach conjecture is true. *Preprint*, arXiv:1312.7748, (2013).
[31] K. HUGHES. Problems and Results related to Waring's problem: Maximal functions and ergodic averages. *Preprint*, arXiv:1310.7904, (2013).
[32] A. D. IONESCU. An endpoint estimate for the discrete spherical maximal function. *Proc. Amer. Math. Soc.* **132**, (2004), no. 5, 1411–1417.
[33] A. D. IONESCU, A. MAGYAR, E. M. STEIN, S. WAINGER. Discrete Radon transforms and applications to ergodic theory. *Acta Math.* **198**, (2007), 231—298.
[34] A. D. IONESCU, A. MAGYAR, S. WAINGER. Averages along Polynomial Sequences in Discrete Nilpotent Lie Groups: Singular Radon Transforms. *Advances in Analysis:* The Legacy of Elias M. Stein (2014), 146.
[35] A. D. IONESCU, S. WAINGER. L^p boundedness of discrete singular Radon transforms. *J. Amer. Math. Soc.* **19**, (2005), no. 2, 357—383.
[36] H. IWANIEC, E. KOWALSKI. Analytic Number Theory. *Vol. 53, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Providence RI, (2004).*
[37] P. R. JELENKOVIĆ, M. OLVERA–CRAVIOTO. Implicit renewal theorem and power tails on trees. Preprint (2010). Available at `http://arxiv.org/abs/1006.3295`.
[38] R. L. JONES, R. KAUFMAN, J. M. ROSENBLATT, M. WIERDL. Oscillation in ergodic theory. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.,* **18**, (1998), no. 4, 889–935.
[39] R. L. JONES, A. SEEGER, J. WRIGHT. Strong variational and jump inequalities in harmonic analysis. *Trans. Amer. Math. Soc.* **360**, (2008), no. 12, 6711–6742.
[40] H. KESTEN. Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. *Acta Math.* (1973) **131** 207–248.
[41] H. KESTEN. Renewal theory for functionals of a Markov chain with general state space. *Ann. Probab.* (1974) **2** 355—386.
[42] G. KOLESNIK. The distribution of primes in sequences of the form $\lfloor n^c \rfloor$. *Mat. Zametki*, **2**, (1967), 117–128.
[43] G. KOLESNIK. Primes of the form $\lfloor n^c \rfloor$. *Pacific J. Math.*, **118**, (1985), 437–447.
[44] B. KRAUSE. Polynomial Ergodic Averages Converge Rapidly: Variations on a Theorem of Bourgain. *Preprint*, arXiv:1402.1803, (2014).
[45] B. KRAUSE. Some Optimizations for (Maximal) Multipliers in L^p. *Preprint*, arXiv:1402.1804, (2014).
[46] A. KUMCHEV. On the Piatetski–Shapiro–Vinogradov theorem. *J. Théor. Nombres Bordeaux,*, **9**, (1997), no. 1, 11–23.
[47] M. T. LACEY. On an inequality due to Bourgain. *Ill. J. Math.*, **41**, (1997), no. 2, 231–236.
[48] M. T. LACEY. The bilinear maximal functions map into L^p for $2/3 < p \leqslant 1$. *Ann. Math.*, **151**, (2000), 35–57.
[49] P. LAVICTOIRE. An L^1 ergodic theorem for sparse random subsequences. *Math. Res. Lett.*, **16**, (2009), no. 5, 849–859.
[50] P. LAVICTOIRE. Universally L^1-Bad Arithmetic Sequences. *J. Anal. Math.*, **113**, (2011), no. 1, 241–263.
[51] D. LEITMANN. The distribution of prime numbers in sequences of the form $\lfloor f(n) \rfloor$. *Proc. London Math. Soc.*, **35**, (1977), no. 3, 448–462.
[52] H.Q. LIU, J.RIVAT. On the Piateski–Shapiro prime number theorem. *Bull. London Math. Soc.*, **24**, (1992), 143–147.
[53] A. MAGYAR. Diophantine equations and ergodic theorems. *Amer. J. Math.* **124**, (2002), 921–953.
[54] A. MAGYAR, E. M. STEIN, S. WAINGER. Discrete analogues in harmonic analysis: spherical averages. *Ann. Math.* **155**, (2002), 189–208.

[55] A. Magyar, E. M. Stein, S. Wainger. Maximal operators associated to discrete subgroups of nilpotent Lie groups. *J. d'Analyse Math.* **101**, (2007), no. 1, 257–312.

[56] R. Nair. On polynomials in primes and J. Bourgain's circle method approach to ergodic theorems. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **11**, (1991), 485–499

[57] R. Nair. On polynomials in primes and J. Bourgain's circle method approach to ergodic theorems II. *Studia Mathematica*, **105**, (1993), no. 3, 207–233.

[58] M. B. Nathanson. Additive Number Theory. The Classical Bases. *Springer–Verlag, (1996).*

[59] F. Nazarov, R. Oberlin, C. Thiele. A Calderón Zygmund decomposition for multiple frequencies and an application to an extension of a lemma of Bourgain. *Math. Res. Lett.*, **17**, (2010), no. 3, 529—545.

[60] D. M. Oberlin. Two discrete fractional integrals. *Math. Res. Lett.* **8**, (2001), 1—6.

[61] R. Oberlin. Estimates for compositions of maximal operators with singular integrals. *Canad. Math. Bull.* **56**, (2013), no. 4, 801–813.

[62] R. Oberlin, A. Seeger, T. Tao, C. Thiele, J. Wright. A variation norm Carleson theorem. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **14**, (2012), no. 2, 421—464.

[63] I. Piatetski–Shapiro. On the distribution of prime numbers in sequences of the form $\lfloor f(n) \rfloor$. *Math. Sbornik* **33**, (1953), 559—566.

[64] L. B. Pierce. A note on twisted discrete singular Radon transforms. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2012**, (2012) no. 1, 17–33.

[65] L. B. Pierce. Discrete analogues in harmonic analysis. *PhD Thesis, Princeton University (2009)*

[66] L. B. Pierce. Discrete fractional Radon transforms and quadratic forms. *Duke Math. J.*, **161**, (2012) no. 1, 69–106.

[67] M. Riesz. Sur les fonctions conjugeées. *Math. Z. 27 (1928), 218—244.*

[68] J. Rivat, P. Sargos. Nombres premiers de la forme $\lfloor n^c \rfloor$. *Canad. J. Math.* **53**, (2001), 414–433.

[69] J. Rosenblatt, M. Wierdl. Pointwise ergodic theorems via harmonic analysis. Ergodic theory and its connections with harmonic analysis (Alexandria, 1993). *3—151, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 205, Cambridge University Press, Cambridge (1995).*

[70] K. F. Roth. On certain sets of integers. *J. London Math. Soc.* **28**, (1953), 104–109.

[71] E. M. Stein. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. *Princeton University Press (1993).*

[72] E. M. Stein, S. Wainger. Discrete analogues of singular Radon transforms. *Bull. Amer. Math. Soc.* **23**, (1990), 537—544.

[73] E. M. Stein, S. Wainger. Discrete analogues in harmonic analysis I: ℓ^2 estimates for singular Radon transforms. *Amer. J. Math.* **121**, (1999), 1291—1336.

[74] E. M. Stein, S. Wainger. Discrete analogues in harmonic analysis II: Fractional integration. *J. d'Analyse Math.* **80**, (2000), 335—355.

[75] E. M. Stein, S. Wainger. Two discrete fractional integral operators revisited. *J. d'Analyse Math.* **87**, (2002), 451—479.

[76] E. Szemerédi. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. *Acta Arith.* **27**, (585), (1975), 199–245.

[77] T. Tao, V. Vu. Additive combinatorics. *Cambridge University Press, vol. 105, (2006).*

[78] C. Thiele. The maximal quartile operator. *Rev. Mat. Iberoamericana* **17**, (2001), no. 1, 107–136.

[79] R. Urban, J. Zienkiewicz. Weak Type $(1, 1)$ Estimates for a Class of Discrete Rough Maximal Functions. *Math. Res. Lett.* **14**, (2007), no. 2, 227–237.

[80] J. G. van der Corput. Über Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten. *Math. Ann*, **116**, (1939), no. 1, 1–50.

[81] J.G. van der Corput. Neue zahlentheoretische Abschatzungen II. *Math. Zeit.* **29**, (1929), 397—426.

[82] I. M. Vinogradov. The Method of Trigonometrical Sums in the Theory of Numbers. *Interscience Publishers New York (1954)*

[83] S. Wainger. Discrete analogues of singular and maximal Radon transforms. *Doc. Math. Extra Volume ICM* (1998), II 743—753.

[84] N. Wiener. The ergodic theorem. *Duke Math. J.* **5**, (1939), 1–18

[85] M. Wierdl. Pointwise ergodic theorem along the prime numbers. *Israel J. Math.* **64**, (1988), (3), 315—336

[86] J. Wright. Discrete analogues in harmonic analysis. *Poland Lectures–November 2013.*

[87] P. Zorin–Kranich. Variation estimates for averages along primes and polynomials. *J. Funct. Anal.* **268**, (2015), no. 1, 210–238.

M. Mirek, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski, Plac Grunwaldzki 2/4, 50–384 Wrocław, Poland

E-mail address: mirek@math.uni.wroc.pl

Mariusz Mirek