dr hab. Bartłomiej Bosek, prof. UJ
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński, 31-007 Kraków
E-mail: bosek@tcs.uj.edu.pl

Kraków, 19.08.2020

Recenzja rozprawy doktorskiej Krzysztofa Piecucha

Pewne warianty klasycznych problemów optymalizacji kombinatorycznej

Rozprawa doktorska Krzysztofa Piecucha dotyczy dwóch problemów optymalizacji kombinatorycznej. Pierwszy z nich dotyczy *kolorowań grafów unikających monochromatycznych trójkątów*. Klasyczne kolorowanie grafów polega na przydzieleniu kolorów wierzchołkom grafu w ten sposób, aby dwa wierzchołki połączone krawędzią posiadały różny kolor. W wersji rozważanej w rozprawie doktorskiej, wierzchołkom przydzielane są kolory w ten sposób, że każda trójka wierzchołków, które są połączone każdy z każdym, nie mogą być pokolorowane tym samym kolorem. Jest to naturalna wariacja na temat kolorowania, która aż się prosi o analizę. Z faktu, że w stosunku do klasycznego problemu kolorowania zadane warunki są mniej restrykcyjne, minimalna liczba kolorów wymaganych do optymalnego kolorowania bez trójkątów będzie mniejsza. Faktycznie, Twierdzenie 1 w rozprawie doktorskiej mówi, że minimalna liczba potrzebna do pokolorowania grafu G bez monochromatycznych trójkątów, oznaczana przez $\chi_3(G)$, mieści się pomiędzy $\lceil \omega(G)/2 \rceil$ a $\lceil \chi(G) \rceil$, gdzie $\omega(G)$ to rozmiar maksymalnej kliki w grafie G, a $\chi(G)$ to liczba chromatyczna grafu G. Twierdzenia 2 i 3 pokazują, że powyższych oszacowań nie da się polepszyć. Autor dowodzi ponadto w Twierdzeniu 4, że wartość $\chi_3(G)$ jest oszacowana z góry przez $\lceil \Delta(G)/2 \rceil$ o ile G ma co najmniej 4 wierzchołki i nie jest kliką o nieparzystej wielkości. Następnie autor wprowadza pojęcie krawędzi *k-polarnych* i dowodzi szereg obserwacji na ich temat, co później wykorzystuje w dowodach NP-trudności.

Główną częścią omawianej tematyki jest przypadek grafów planarnych. Appel i Haken w pracy[1], w której dowodzą czterokorowalności[2] grafów planarnych, pokazują zarazem algorytm znajdujący takie kolorowanie w czasie kwadratowym. Po otrzymaniu takiego kolorowania jeżeli zunifikujemy kolory pierwszy z drugim oraz trzeci z czwartym, to otrzymamy 2-kolorowanie bez trójkątów. Jeżeli graf, który podaliśmy na wejściu, ma choć jeden trójkąt, to w czasie kwadratowym uzyskaliśmy optymalne kolorowanie. Autor rozprawy doktorskiej prezentuje znaczącą poprawę powyższego podejścia poprzez przedstawienie liniowego algorytmu znajdującego 2-kolorowania bez trójkątów w omawianej klasie grafów — podrozdział 2.6. W mojej ocenie jest to główny wynik związanym z omawianą tematyką. Autor najpierw prezentuje elegancki algorytm, który koloruje ztriangulizowany graf planarny za pomocą 2 kolorów w taki sposób, że

[1] K. Appel oraz W. Haken. Every planar map is four colorable. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 82:711-712, 1976.

[2] W klasycznym sensie.

BB

każda ściana wewnętrzna nie jest monochromatyczna. Następnie pokazane jest jak powyższy algorytm (z niewielką modyfikacją) wykorzystać do 2-kolorowania dowolnego grafu planarnego. Przydatnym okazało się w tym przypadku tzw. *drzewo trójkątów*, które koduje zagnieżdżającą się dekompozycje grafu planarnego na podgrafy, w których występujące trójkąty są ścianami. Zaprezentowany algorytm jest nietrywialny, a dowód elegancki.

Ponadto autor zaprezentował wielomianowy algorytm w klasie grafów o ograniczonym przez stałą rozmiarze pokrycia wierzchołkowego (patrz Twierdzenie 5) oraz liniowy algorytm dla grafów o ograniczonej szerokości drzewiastej (patrz Twierdzenie 6). Warto w tym miejscu wspomnieć, że w dowodzie Twierdzenia 6 autor wykorzystuje Twierdzenie Courcelle'a dotyczącego sprawdzania prawdziwości formuł monadycznych logiki drugiego rzędu dla grafów o stałej szerokości drzewiastej. Sprowadza to w ten sposób do prostej obserwacji. Nie mniej jednak pokazuje to, że autor zna i biegle posługuję się narzędziami z teorii logiki. Na koniec są zaprezentowane wyniki dotyczące NP-trudności. Oczywistym jest, że problem sprawdzania, czy dany graf jest k-kolorowalny bez trójkątów jest w klasie NP. Autor pokazuje, że w klasie wszystkich grafów omawiany problem jest NP-trudny — Twierdzenie 7. Problem ten zostaje wciąż NP-trudny nawet jeżeli zawęzimy się do klasy grafów, które nie posiadają kliki 4-elementowej (patrz Twierdzenie 8) jak i do klasy grafów o maksymalnym stopniu co najwyżej 3 (patrz Twierdzenie 9). Warto zauważyć, że jeżeli zabronimy występowania klik 3-elementowych, czy też wierzchołków stopnia 3 problem w oczywisty sposób staje się wielomianowy. W dowodach NP-trudności autor ponownie wykazał się umiejętnością posługiwania się teorią logiki oraz teorią złożoności. Powyższe wyniki zostały zaprezentowane w roku 2018 na konferencji „The 13th International Computer Science Symposium in Russia" oraz opublikowane w materiałach pokonferencyjnych w serii *Lecture Notes in Computer Science*.[3]

Druga część doktoratu dotyczy problemu plecakowego online. W tym problemie na początku znajduje się n plecaków, które mają taką samą pojemność. Algorytm na wejściu otrzymuje sekwencyjnie przedmioty, które mają swój rozmiar jak i wartość. Po otrzymaniu danego przedmiotu algorytm decyduje się czy włożyć nowo zaprezentowany przedmiot do jednego z plecaków. Przy pozytywnej decyzji wybiera ponadto plecak, do którego ma być przydzielony przedmiot. Decyzja algorytmu jest nieodwracalna oraz zależy jedynie od sekwencji przedmiotów, która została dotąd zaprezentowana. Następnie pojemność wybranego plecaka zmniejsza się o rozmiar włożonego przedmiotu — aktualny rozmiar plecaka nigdy nie może być ujemny. Autor w rozprawie doktorskiej rozważa wersję proporcjonalną, czyli taką, w której wartości przedmiotów są proporcjonalne do ich rozmiarów.

W przypadku, gdy jest dostępny jedynie jeden plecak Marchetti-Spaccamela oraz Vercellis[4] udowodnili, że nie istnieje deterministyczny algorytm online z ograniczoną stałą kompetytywności. Böckenhauer i inni.[5] zaprezentowali randomizowany algorytm o stałej konkurencyjnościom $1/2$. Wynik ten jest optymalny. W przypadku, gdy dostępne jest więcej niż jeden plecak, Cygan i inni.[6] pokazali, że algorytm First-Fit jest $1/2$-konkurencyjny. Pokazali oni również,

[3] M. Karpiński, K. Piecuch. On vertex coloring without monochromatic triangles. *Lecture Notes in Computer Science*, 10846:220-231, 2018.

[4] A. Marchetti-Spaccamela, C. Vercellis. Stochastic on-line knapsack problems. *Mathematical Programming*, 68:73-104, 1995.

[5] H. J. Böckenhauer, D. Komm, R. Královic, P. Rossmanith. The online knapsack problem: Advice and randomization. *Theoretical Computer Science*, 527:61-72, 2014.

[6] M. Cygan, Ł. Jeż, J. Sgall. Online knapsack revisited, *Theoretical Computer Science*, 58(1):153-190, 2016.

ЗВ

że nie istnieje algorytm o stałej konkurencyjności lepszej niż $R = 1/(1+\ln 2) \approx 0.59$. Wynik ten dotyczy także algorytmów randomizowanych. Autor w rozprawie doktorskiej prezentuje deterministyczny algorytm online[7] o stałej konkurencyjności $R - O(1/n)$, patrz Twierdzenie 11 oraz 12 i ostatecznie Wniosek 2. Ponadto w rozprawie został zaprezentowany argument (Twierdzenie 10) pokazujący, że jest to optymalny wynik poprawiając przy tym rezultat Cygana i innych.[6] w przypadku deterministycznym. Powyższy wynik jest bardzo silny choćby dlatego, że całkowicie domyka problem w wersji deterministycznej. Główna idea zaprezentowanego algorytmu jest skategoryzowanie przedmiotów na *duże*, *średnie*, oraz *małe* i w zależności od tego, jakiego typu przychodzi przedmiot, algorytm wykonuje stosowną procedurę. Ważną rolę ma także tzw. *funkcja progowa* $f : [0,1] \to [\frac{1}{2}, 1]$, która decyduje, czy algorytm bierze duży przedmiot. Funkcja f została tak dobrana, że algorytm na dużych przedmiotach utrzymuje żądaną stałą konkurencyjności $R - O(1/n)$. Algorytm składa się z powyższych jak i wielu innych nietrywialnych pomysłów. Dowód konkurencyjności zaprezentowanego algorytmu (patrz Twierdzenie 11 oraz 12) jest dość skomplikowany i dzieli się na wiele przypadków i podprzypadków. Niewątpliwie wymagał on wnikliwej analizy i żmudnej pracy. O wartości powyższych wyników może świadczyć chociażby to, że zostały zaprezentowane w roku 2020 na konferencji „47th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming”.[8]

Praca jest zredagowana dość dobrze zarówno pod względem stylistycznym jak i graficznym. Poza literówkami, o których pozwolę sobie nie pisać, mam jedynie dwie niewielkie uwagi redakcyjne. Po pierwsze autor dowodzi NP-trudności pewnych problemów, lecz nigdzie nie zdefiniował NP-trudność. Nie musiałaby to być bardzo formalna definicja, ale cokolwiek co by takową przypominało byłoby wskazane. Tekst w podrozdziale 1.3 pt. „NP-zupełność” jest moim zdaniem niewystarczający jak na rozprawę doktorską z informatyki. Druga moja uwaga dotyczy dowodu Twierdzenia 3, gdzie autor pisze *„Można udowodnić przez rozważenie przypadków, że [...]”*. Moim zdaniem niezależnie jak bardzo oczywiste i żmudne byłyby fragmenty dowodu to w rozprawie doktorskiej powinny być zaprezentowane w całości i nie powinny być zostawiane czytelnikowi. Powyższe dwie kwestie były jedynymi, które rzuciły mi się w oczy i nie wpływają na ogólną ocenę pracy.

Podsumowując, stwierdzam, że praca pana Krzysztofa Piecucha to bardzo solidny doktorat zawierający szereg nowych i wartościowych rezultatów dotyczących tematyki optymalizacji kombinatorycznej. Cała praca świadczy o bardzo dobrym opanowaniu warsztatu badawczego oraz znakomitej intuicji i erudycji w zakresie tematyki pracy. Uważam zatem, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Krzysztofa Piecucha do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

B Bosek

Signed by /
Podpisano przez:
Bartłomiej Emil
Bosek
Date / Data: 2020-08-19 22:39

Bartłomiej Bosek

B Bosek

[7] Algorytm 1 na stronie 41.

[8] M. Bienkowski, M. Pacut, K. Piecuch. An Optimal Algorithm for Online Multiple Knapsack. *ICALP* 2020: 13:1-13:17.