THEORETICAL COMPUTER SCIENCE
Jagiellonian University

prof. dr hab. Paweł M. Idziak
Katedra Algorytmiki
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński
ul. Prof. Stanisława Łojasiewicza 6
30–348 Kraków

tel.: (+48–12) 664 66 48
sekr.: (+48–12) 664 66 47
fax: (+48–12) 664 66 72
e–mail: idziak@tcs.uj.edu.pl
http://tcs.uj.edu.pl

Kraków, 14 czerwca 2013

Recenzja rozprawy habilitacyjnej dra Romana Wencla

pt. *Własności zbiorów definiowalnych w strukturach słabo o-minimalnych*

Na dorobek naukowy dra Wencla składa się 11 prac[1]. Wyniki 8-miu spośród nich zostały otrzymane po uzyskaniu stopnia doktora nauk matematycznych w Uniwersytecie Wrocławskim w 2002 roku. Cztery samodzielne prace stanowią rozprawę habilitacyjną:

(1) R.Wencel, Weakly *o*-minimal non-valuational structures, *Annals of Pure and Applied Logic*, **154**(2008), 139–162.

(2) R.Wencel, On expansions of weakly *o*-minimal non-valuational structures by convex predicates, *Fundamenta Mathematicae*, **202**(2009), 147–159.

(3) R.Wencel, Weakly *o*-minimal expansions of ordered fields of finite transcendence degree, *Bulletin of the London Mathematical Society*, **41**(2009), 109–116.

(4) R.Wencel, Topological properties of sets definable in weakly *o*-minimal structures, *Journal of Symbolic Logic*, **75**(2010), 841–863.

Tematyka prac dra Romana Wencla to bardzo żywy nurt teorii modeli rozpoczęty przez A.Pillay'a i C.Steinhorn'a, którzy na początku lat 1980-tych wprowadzili pojęcie *o*-minimalności w oparciu o idee Lou van den Dries'a uogólniające geometrię semi- i sub-analityczną nad ciałem liczb rzeczywistych.

Struktury *o*-minimalne, to takie struktury z wbudowanym porządkiem, w których zbiory definiowalne są skończonymi sumami przedziałów (a zatem definiowalne w języku czysto porządkowym). Osłabieniem tego pojęcia, rozważanym w rozprawie, jest słaba *o*-minimalność. Wymaga się tu, by zbiory definiowalne (w wymiarze 1) były zbiorami wypukłymi (porządkowo). W odróżnieniu od *o*-minimalności, słaba *o*-minimalność nie przenosi się przez elementarną równoważność, skąd konieczność

[1] Według podanej przez Niego listy publikacji.

rozważania teorii słabo o-minimalnych. Teorie takie są niestabilne, lecz jak pokazały dotychczasowe badania są jeszcze na tyle regularne, by zrozumienie struktury zbiorów definiowalnych (dowolnego wymiaru) nie było zadaniem beznadziejnym. W zrozumieniu takim bardzo pomocne są narzędzia wypracowane przez H.D.Macpherson'a, D.Marker'a i C.Steinhorn'a związane z (silnym) rozkładem komórkowym (dla zbiorów definiowalnych) we wzbogaceniach ciał rzeczywiście domkniętych.

Jak pokazuje swoimi wynikami dr Wencel, silny rozkład komórkowy jest również właściwym pojęciem w słabo o-minimalnych wzbogaceniach innych modeli (np. niewaluacyjnych wzbogaceniach grup uporządkowanych (prace 1,2), niewaluacyjnych wzbogaceniach ciał uporządkowanych skończonego stopnia przestępnego nad $\mathbb{Q}$ (praca 3)), czy w badaniach o całkiem ogólnym kontekście (praca 4).

Za najciekawszy wynik pracy (1) uważam Wniosek 2.16 pokazujący, że jeśli wzbogacenie słabo o-minimalnej grupy uporządkowanej jest typu niewaluacyjnego[2], to ma ono własność silnego rozkładu komórkowego (odwrotna implikacja jest relatywnie łatwa nawet w ogólnieszym kontekście). Własność silnego rozkładu komórkowego jest ważna nie tylko dlatego, że pozwala zrozumieć strukturę zbiorów definiowalnych (np. Wniosek 2.17), ale też przenieść wiele pojęć i technik wypracowanych dla struktur o-minimalnych (np. pojęcia wymiaru topologicznego, czy charakterystyki Euler'a zbiorów definiowalnych, mają porządane własności).

W pracy (2) używa się silnego rozkładu komórkowego dla niewaluacyjnych rozszerzeń grup uporządkowanych, by pokazać, że rozszerzenie o niewaluacyjne predykaty unarne nie zaburza niewaluacyjnosci tak rozszerzonej struktury.

Praca (3) zawiera bardzo ładny wynik uzyskany dzięki wypracowanemu w (1) zrozumieniu zbiorów definiowalnych. Orzeka on (w ładniejszej wersji), że funkcje definiowalne w słabo o-minimalnych wzbogaceniach uporządkowanych podciał ciała $\mathbb{R}$ o skończonym stopniu przestępności nad $\mathbb{Q}$ nie mogą (w nieskończoności) rosnąć szybciej niż wielomiany. Wynik ten (i jego rozszerzenie w Twierdzeniu 9) jest pokazem sporej erudycji autora.

Świat struktur słabo o-minimalnych badanych w ostatniej pracy rozprawy habilitacyjnej (4) jest na tyle ogólny, że nie ma w nim dostatecznie dobrego rozkładu komórkowego, by łatwo było imitować i przenieść wyniki dla struktur o-minimalnych. Okazuje się jednak, że dość dobrą protezą pozostaje tu niezmienniczość (względem definiowalnych iniekcji) wymiaru topologicznego zbiorów definiowalnych (Twierdzenie 2.13). Niezmienniczość ta pomocna jest przy częściowym zrozumieniu "dużych" zbiorów definiowalnych, wykorzystanym (w innej już pracy) do badania grup definiowalnych w strukturach słabo o-minimalnych. Końcowa część tej pracy podaje listę własności struktur słabo o-minimalnych równoważnych addytywności wymiaru zbiorów definiowalnych.

[2]tzn. bez nietrywialnych waluacji w strukturze wyjściowej, lub bardziej intuicyjnie, bez niezerowych odstępów w cięciach Dedekinda

Poza czterema pracami wchodzącymi w skład rozprawy habilitacyjnej, dr Wencel jest (współ)autorem 7-miu innych publikacji. Dwie z nich są kontynuacją badań zaprezentowanych w rozprawie.

W jednej rozważa się osłabienia addytywności wymiaru topologicznego i wyizolowuje warunki pozwalające na pokazanie, że duże definiowalne podzbiory grupy definiowalnej w strukturze słabo *o*-minimalnej są generyczne. Wypracowane techniki pozwalają również na przeniesienie wyników A.Pillay'a (dotyczących topologizacji definiowalnych struktur algebraicznych) ze struktur *o*-minimalnych na słabo *o*-minimalne.

Druga z tych prac dowodzi, że własność silnego rozkładu komórkowego struktur przenosi się przez elementarną równoważność (wśród struktur słabo *o*-minimalnych).

Pozostałe 5 prac to bardzo zaawansowane wyniki dotyczące *o*-minimalności w strukturach boole'owsko uporządkowanych[3] oraz roli (słabej) eliminacji elementów urojonych w *o*-minimalnych wzbogaceniach algebr Boole'a. Wszystkie te prace zawierają technicznie trudne wyniki wzbogacające wiedzę o zbiorach definiowalnych w takich strukturach.

Dr Wencel brał udział w realizacji kilku projektów badawczych finansowanych m.in. przez Komisje Europejską, i KBN/MNiSW, a jednego takiego projektu MNiSW był kierownikiem. Wygłaszał referaty na kilkunastu konferencjach międzynarodowych, w tym kilka razy na zaproszenie organizatorów. Odbył dwuletni staż na University of Leeds, pracując w grupie H.D.Macphersona. Jego aktywność w międzynarodowym środowisku naukowym jest więc dostrzegalna. Dostrzegalność ta przebija się również w cytowaniach: *MathSciNet* podaje ich 24, a *ISI Web of Knowledge* 18, przy czym w obu przypadkach ok. 1/4 to nie autocytowania.

Podsumowując, w swoich badaniach dr Wencel z dużą biegłością przenosi wyniki dotyczące struktur *o*-minimalnych do ogólniejszego świata modeli słabo *o*-minimalnych. Niewątpliwie (uznany przeze mnie za najcenniejszy) wynik pracy (1) jest tu niezwykle pomocny. Całość Jego badań to praca rzetelna. Brakuje mi w nich jednak własnej linii badań autora, własnych metod (a nie jedynie rozwinięcia metod istniejących), pojęć (nietechnicznych na potrzeby dowodów) i kierunków (niezbędnych w kształceniu własnych doktorantów). Doceniam jednak uzyskane wyniki, ich wagę i pokonane trudności techniczne, oraz fakt, że prowadzone badania dotyczą żywego nurtu współczesnej teorii modeli. Uważam, że przedstawiony dorobek stanowi wystarczająca podstawę do nadania drowi Romanowi Wenclowi stopnia naukowego doktora habilitowanego nauk matematycznych.

P. M. idz

[3] To tematyka rozprawy doktorskiej.