Dr hab. Krzysztof Nowak
Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

Kraków, dnia 17 kwietnia 2013 r.

Recenzja rozprawy habilitacyjnej i ocena dorobku naukowego dr Romana Wencla

I. Recenzja rozprawy habilitacyjnej "Własności zbiorów definiowalnych w strukturach słabo o-minimalnych"

Rozprawa habilitacyjna dr Romana Wencla, poświęcona strukturom słabo o-minimalnym, składa się z czterech prac [H1, H2, H3, H4] opublikowanych w bardzo dobrych czasopismach międzynarodowych. Pierwsze trzy dotyczą przede wszystkim tych struktur o-minimalnych, które posiadają silny rozkład komórkowy, w tym głównie niewaluacyjnych wzbogaceń grup uporządkowanych. W czwartej, dr Roman Wencel rozwija teorię wymiaru w ogólnych strukturach słabo o-minimalnych. Prace te plasują się w głównym nurcie prężnie rozwijającej się dzisiaj teorii struktur słabo o-minimalnych. Dziedzina ta jest stosunkowo młoda i leży na pograniczu teorii modeli, geometrii i topologii, chociaż ma także ścisłe związki z algebrą, geometrią algebraiczną i analityczną oraz teorią liczb. Zanim przejdę do szczegółowego opisu rozprawy, przedstawię pokrótce tło historyczne.

Teoria struktur o-minimalnych została zainicjowana badaniami L. van den Driesa, które były związane z pytaniami A. Tarskiego dotyczącymi struktury $(\mathbb{R}, +, \cdot, \exp)$. Termin " struktura o-minimalna", wprowadzony przez Pillaya–Steinhorna, oznacza strukturę, która jest takim wzbogaceniem gęstego porządku liniowego bez końców, że jedynymi podzbiorami definiowalnymi jej uniwersum M są skończone sumy przedziałów. Własność ta implikuje istnienie rozkładów komórkowych, zgodnych z dowolną skończoną rodziną podzbiorów definiowalnych w M^k, $k \in \mathbb{N}$. Dlatego o-minimalność zachowuje się przy przejściu do struktur elementarnie równoważnych. Także dzięki rozkładom komórkowym topologia zbiorów definiowalnych jest "oswojona" ("tame") i ma własności finitarne, takie jak skończona liczba składowych spójnych, triangulacja, stratyfikacja itp. Są to uogólnienia rezultatów dotyczących zbiorów semialgebraicznych i semianalitycznych uzyskane przez S. Łojasiewicza.

Struktura słabo o-minimalna $\mathcal{M} = (M, \leqslant, \ldots)$ jest takim wzbogaceniem gęstego porządku liniowego bez końców, że jedynymi podzbiorami definiowalnymi jej uniwersum M są skończone sumy zbiorów wypukłych. Pojęcie to użył po raz pierwszy M. Dickmann. Jednak w przypadku struktur słabo o-minimalnych, sytuacja znacznie się komplikuje. Na przykład, liczba składowych wypukłych definiowalnej rodziny podzbiorów jej uniwersum może nie być jednostajnie ograniczona (cf. [MMS]). Ogólne struktury słabo o-minimalne nie mogą więc mieć rozkładów komórkowych, a własność słabej o-minimalności nie jest zachowywana przez relację elementarnej równoważności.

W strukturach słabo o-minimalnych nie zachodzi też analog o-minimalnego twierdzenia o monotoniczności. Jakkolwiek dla każdej funkcji definiowalnej $f : I \longrightarrow M$, jej dziedzinę I można przedstawić jako skończoną sumę zbiorów wypukłych I_k, na których funkcja f jest ciągła, nie można na ogół wybrać tych zbiorów I_k tak, aby f była na nich ściśle monotoniczna lub stała. Niech $\overline{M}^{\mathcal{M}}$ będzie uzupełnieniem uniwersum M, tzn. zbiorem wszystkich definiwalnych przekrojów Dedekinda w M z indukowanym porządkiem liniowym. W przypadku struktur słabo o-minimalnych, istotną rolę odgrywają funkcje definiowalne o wartościach w tym uzupełnieniu, badane przez R. Arefieva. Pojęcie komórki, skonstruowanej przy pomocy takich funkcji, zostało wprowadzone przez D. Macphersona, D. Markera i C. Steinhorna [MMS], którzy zainicjowali badanie teorii słabo o-minimalnych (tzn. takich, których wszystkie modele są słabo o-minimalne). Udowodnili oni, że w każdym modelu teorii słabo o-minimalnej istnieją rozkłady komórkowe zgodne z dowolną skończoną rodziną zbiorów definiowalnych. Jednakże rozkładów komórkowych nie można tu uzyskać wyłącznie przy pomocy funkcji ciągłych, jak miało to miejsce dla struktur o-minimalnych. W pracy [MMS] badano również słabo o-minimalne wzbogacenia ciał uporządkowanych $(R, \leqslant, \dots)$. W szczególności, dla takich wzbogaceń wprowadzono pojęcie struktury niewaluacyjnej, gdy ciało R nie posiada żadnej nietrywialnej waluacji definiowalnej.

Wzbogacenie struktury o-minimalnej o rodzinę unarnych predykatów wypukłych dostarcza naturalnego przykładu struktur słabo o-minimalnych (przykładem jest tu w szczególności o-minimalne wzbogacenie ciała uporządkowanego wraz z podpierścieniem wypukłym). Twierdzenie to zostało podane przez B.Baizhanova oraz przez Y. Baisalova i B. Poizat'a; ci ostatni dążyli do uzyskania alternatywnego i solidnego dowodu. Rezultat ten został z kolei uogólniony na przypadek modeli struktur słabo o-minimalnych przez B.Baizhanova. Wynika on także z bardziej ogólnego twierdzenia S. Shelaha mówiącego, że jeśli $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ są dwoma modelami teorii zależnej, przy czym większa struktura $\mathcal{N}$ jest dostatecznie nasycona, to teoria wzbogacenia mniejszej struktury $\mathcal{M}$ o ślady wszystkich zbiorów definiowalnych w $\mathcal{N}$ ma eliminację kwantyfikatorów (i także jest zależna, chociaż do tej konkluzji założenie o nasyceniu nie jest potrzebne).

Przejdę teraz do opisu prac wchodzących w skład rozprawy habilitacyjnej.

Praca [H1]. W rozdziale 1 wprowadzone jest pojęcie niewaluacyjnego wzbogacenia $\mathcal{M} = (M, \leqslant, +, 0, \dots)$ grupy uporządkowanej, które jest uogólnieniem na przypadek grup pojęcia niewaluacyjnego wzbogacenia ciała uporządkowanego z artykułu [MMS]. Podana jest charakteryzacja niewaluacyjności $\mathcal{M}$ poprzez następujące warunki równoważne (Lemat 1.5):

i) $(M, +)$ nie ma nietrywialnych podgrup definiowalnych.

ii) $\mathcal{M}$ ma własność silnej monotoniczności, tzn. dla każdej funkcji definiowalnej $f : I \longrightarrow \overline{M}^{\mathcal{M}}$ (gdzie $I \subset M$ jest nieskończonym zbiorem definiowalnym), I jest skończoną sumą punktów i otwartych, rozłącznych zbiorów wypukłych I_k, na których f jest ciągłą funkcją ściśle monotoniczną lub stałą.

iii) Każda definiowalna relacja równoważności na M ma skończenie wiele klas nieskończonych.

W rozdziale 2 wprowadzone jest pojęcie silnej komórki. Struktura słabo o-minimalna z własnością silnego rozkładu komórkowego ma własność silnej monotoniczności, a jej teoria jest słabo o-minimalna. Głównym wynikiem jest tu twierdzenie, że niewaluacyjne, słabo o-minimalne wzbogacenie grupy uporządkowanej ma własność silnego rozkładu komórkowego (Wniosek 2.16). Jest to uogólnienie i wzmocnienie twierdzenia o silnych rozkładach komórkowych dla niewaluacyjnych wzbogaceń ciał uporządkowanych, uzyskanego przez D. Macphersona, D. Markera i C. Steinhorna [MMS]; uogólnienie, gdyż dotyczy grup definiowalnych, a nie tylko ciał; wzmocnienie, gdyż silne komórki tutaj konstruowane są silniejsze od tych z pracy [MMS], tzn. ogół pierwszych jest właściwym podzbiorem ogółu tych drugich. Przedstawiony tu dowód jest indukcyjny ze względu na wymiar. Jest technicznie skomplikowany i polega na jednoczesnym dowodzeniu pewnych pięciu warunków (Twierdzenie 2.15). Tak więc, w sytuacji grup słabo o-minimalnych, własności silnego rozkładu komórkowego i niewaluacyjności sa równoważne.

W rozdziale 3, Autor konstruuje tzw. kanoniczne rozszerzenie o-minimalne $\overline{\mathcal{M}}$ struktury $\mathcal{M}$ z silnym rozkładem komórkowym, którego zbiorami definiowalnymi są dokładnie skończone kombinacje boolowskie uzupełnień silnych komórek w strukturze $\mathcal{M}$. Dowód jest także rzeczą dość delikatną. Definiuje się bowiem pewnego rodzaju komórki w zbiorach $\overline{M}^m$, a następnie wykazuje się, że pewne rodziny $\mathcal{D}_m$, $m \in \mathbb{N}$, podzbiorów w $\overline{M}^m$ tworzą strukturę o-minimalną. Mankamentem jest tutaj brak formalnej definicji tych rodzin. Czytelnik musi się domyślać, że $\mathcal{D}_m$ to właśnie ogół skończonych sum komórek w $\overline{M}^m$. Oczywiście ślad dowolnego zbioru definiowalnego w $\overline{\mathcal{M}}$ jest zbiorem definiowalnym w $\mathcal{M}$. Kanoniczne rozszerzenie o-minimalne $\overline{\mathcal{M}}$ niewaluacyjnej grupy (ciała) słabo o-minimalnego jest grupą (ciałem) o-minimalnym.

W rozdziale 4 zdefiniowana została charakterystyka Eulera zbiorów definiowalnych w słabo o-minimalnych strukturach z silnym rozkładem komórkowym, która przyjmuje wartości w pierścieniu $\mathbb{Z}[1/2]$. Udowodniona jest niezależność od wyboru rozkładu komórkowego (Lemat 4.1), a także Twierdzenie 4.2, zawierające podstawowe fakty o charakterystyce Eulera zbiorów definiowalnych, które są adaptacją wyników L. van den Driesa. Na końcu podano przykłady, które wskazują, że ta charakterystyka Eulara nie jest zachowana przez bijekcje definiowalne, oraz że równość wymiarów i charakterystyk Eulera zbiorów definiowalnych nie implikuje istnienia definiowalnej bijekcji pomiędzy nimi. Jest to w obu przypadkach sytuacja odmienna aniżeli w przypadku o-minimalnym.

Praca [H2]. Praca ta została zainspirowana rezultatami B. Baizhanova oraz Y. Baisalova i B. Poizat'a. Głównym wynikiem jest Twierdzenie 2.11:

Załóżmy, że $\mathcal{M}$ jest niewaluacyjną strukturą słabo o-minimalną i $\mathcal{N}$ jej wzbogaceniem o niewaluacyjne predykaty unarne. Wtedy $\mathcal{N}$ jest też strukturą niewaluacyjną.

Jednym z kluczowych punktów dowodu jest poniższa charakteryzacja rodziny $\mathcal{D}_m$, $m \in \mathbb{N}$, zbiorów definiowalnych w strukturze $\mathcal{M}$ wzbogaconej o niewaluacyjny przekrój Dedekinda $(C, M \setminus C)$ (Lemat 2.7):

$$\mathcal{D}_m = \{I(X,C) : \ X \subset M^{m+1} \ \mathcal{M}\text{-definiowalny}\},$$

gdzie

$$I(X,C) := \{a \in M^m : \ \exists b \in C \ \exists c \in M \setminus C \ : \ \{a\} \times (b,c) \subset X\}.$$

Dzięki tej charakteryzacji można też już bezpośrednio wywnioskować, że $(\mathcal{M}, C)$ jest strukturą słabo o-minimalną. Podkreślić należy, że Habilitant rozwija własne metody topologiczno-geometryczne, odpowiednie dla jego teorii unitarnych predykatów niewaluacyjnych. Rezultaty tego artykułu będą w szczególności wykorzystywane w kolejnej pracy [H3].

Praca [H3]. Celem jest tutaj wykazanie, że każde słabo o-minimalne wzbogacenie podciała $K \subset \mathbb{R}$ skończonego stopnia przestępnego jest wielomianowo ograniczone (Twierdzenie 3.3). Ponadto, przedstawione jest poniższe uogólnienie tego rezultatu (Twierdzenie 3.6):

Niech $(K, \leqslant, +, \cdot)$ będzie ciałem uporządkowanym skończonego stopnia przestępnego nad $\mathbb{Q}$. Wtedy każde niewaluacyjne wzbogacenie słabo o-minimalne ciała $(K, \leqslant, +, \cdot)$ jest potęgowo ograniczone.

W krótkim i bardzo pomysłowym dowodzie wykorzystano wyniki pracy [H2] (twierdzenie o wzbogaceniu o niewaluacyjne predkaty wypukłe i istnienie kanonicznego rozszerzenia o-minimalnego struktury niewaluacyjnej), tzw. dychotomię Millera (o-minimalne wzbogacenie ciała $\mathbb{R}$ jest albo wielomianowo ograniczone albo funkcja exp jest w nim 0-definiowalna) lub jej uogólnienie, oraz pewne twierdzenie Diaza z teorii liczb. W szczególnym przypadku, gdy $K = \mathbb{R}_{alg}$ jest ciałem rzeczywistych liczb algebraicznych (Twierdzenie 2.2), podany też został dowód oparty na słabszym, klasycznym twierdzeniu Gelfonda–Schneidera z teorii liczb. Autor przedstawia także alternatywny dowód twierdzenia 3.3 wykorzystujący hipotezę Schanuela.

Chciałbym tutaj zauważyć, że przedstawione rozumowania można jeszcze nieco uprościć. I tak np. w dowodzie Twierdzeń 2.2 lub 3.3, zbiory

$$T := \{(a,b) \in K^2 : \ a > 0, \ b < a^{\sqrt{a}}\} \quad \text{lub} \quad T := \{(a,b) \in K^2 : \ b < 2^a\}$$

są definiowalne w $\mathcal{N}$ na tej samej wprost zasadzie, co zbiór $S := \{(a,b) \in K^2 : b < \exp a\}$, gdyż jeśli funkcja $\exp(x)$ jest definiowalna w strukturze $\overline{\mathcal{N}}$, to są nimi także funkcje x^y i 2^x.

Praca [H4]. W artykule rozwijana jest teoria wymiaru w ogólnych strukturach słabo o-minimalnych. Celem wiodącym jest tutaj twierdzenie o niezmienniczości wymiaru względem bijekcji definiowalnych. W przypadku struktur o-minimalnych, rezultat ten jest stosunkowo prostą konsekwencją rozkładów komórkowych. Dla modeli teorii słabo o-minimalnych, D. Macpherson, D. Marker i C. Steinhorn [MMS] też wykorzystywali rozkłady komórkowe i nasycenie.

Dlatego ich podejście nie daje się w łatwy sposób przenieść na przypadek ogólnych struktur słabo o-minimalnych. Habilitant rozwija własne podejście geometryczne. W tym celu wprowadza pojęcie gładkości jednego zbioru definiowalnego względem drugiego (definicja 2.6), które ma charakter czysto topologiczny. Wprowadza też pojęcie podzbioru J-twartego S w M^m, gdzie $J \subset \{1, \dots, m\}$ (definicja 2.2). Dla dowolnego zbioru J-otwartego $S \subset m^m$, który nie jest podzbiorem otwartym (czyli $J \subsetneq \{1, \dots, m\}$), jego przecięcia z wszystkimi prostymi równoległymi do osi x_i, $i \notin J$, są skończone. Lemat 2.4 mówi o podziale zbioru definiowalnego na skończoną ilość zbiorów J-otwartych. Jest on kluczowy, gdyż umożliwia indukcję względem wymiaru przestrzeni obejmującej, wykorzystywaną w dowodach Twierdzeń 2.11 i 3.6. Pierwsze z nich, mające fundamentalny charakter, wypowiada szereg naturalnych własności, objętych jednoczesną indukcją. Są wśród nich następujące:

a) $\dim (cl(S) \setminus S) < \dim S$;

b) jeśli $X \subset S$ *i* $\dim X = \dim S$, *to zbiór tych punktów* $a \in X$, *w których* X *jest gładki względem* S, *jest duży w* X;

c) zbiór punktów ciągłości definiowalnej funkcji $f : S \longrightarrow M$ *jest duży w* S;

f) jeśli restrykcja $\pi|S$ *kanonicznej projekcji* $\pi : M^{m+1} \longrightarrow M^m$ *ma włókna skończone, to* $\dim S = \dim \pi(S)$.

Natychmiastową konsekwencją własności f) jest właśnie niezmienniczość wymiaru względem bijekcji definiowalnych (Twierdzenie 2.13). W strukturach o-minimalnych wymiar ma własność addytywności, czego konsekwencją jest następująca własność:

Jeśli S *jest dużym podzbiorem w* $X \times Y$, *to zbiór tych* $a \in X$, *dla których cięcie* S_a *jest duże w* Y, *jest duży w* X.

Własności tej nie mają struktury słabo o-minimalne (cf. [MMS]). Mają one jednak poniższą słabszą własność, udowodnioną w rozdziale 3 (Twierdzenie 3.6):

Jeśli S *jest dużym podzbiorem w* $X \times Y$ *i* $\dim Y = k$, *to zbiór*

$$\{(a_1, \dots, a_{2^k}) \in X^{2^k} : S_{a_1} \cup \dots \cup S_{a_{2^k}} \text{ jest duży w } Y\}$$

jest duży w X^{2^k}.

Nie wiadomo, czy wykładnik 2^k występujący w powyższym twierdzeniu może zostać zmniejszony; wiadomo, że musi wynosić co najmniej $k + 1$.

W ostatnim rozdziale podano pewne interesujące charakteryzacje addytywności wymiaru w strukturach słabo o-minimalnych, również w terminach funkcji definiowalnych o wartościach w $\overline{M}^{\mathcal{M}}$ (Twierdzenie 4.2), oraz charakteryzację addytywności w terminach własności wymiany domknięcia definiowalnego (Lemat 4.3).

II. Recenzja dorobku naukowego

Na pozostały dorobek naukowy dr Romana Wencla składa się siedem artykułów [NW, W1, W2, W3, W4, W5, W6]. Zostaną one omówione w kilku grupach tematycznych.

Prace [NW, W1, W2] zawierają wyniki rozprawy doktorskiej i są poświęcone o-minimalnym wzbogaceniom porządków indukowanych przez algebry Boole'a. Pierwsza została napisana wspólnie z Promotorem, prof. dr hab. Ludomirem Newelskim, przy czym, zgodnie z oświadczeniem Habilitanta, jego wkład w powstanie tej publikacji wynosi 60%. Prace te poświęcone są o-minimalnym teoriom struktur boolowsko uporządkowanych.

Przypomnijmy, że wzbogacenie $\mathcal{M}$ nieskończonego porządku częściowego $(M, \leqslant)$ jest quasi o-minimalne, gdy dowolny podzbiór definiowalny w M jest boolowską kombinacją zbiorów postaci $x \geqslant a$, $x \leqslant b$, gdzie $a, b \in M$. Strukturę $\mathcal{M}$ nazywamy o-minimalną, gdy dla dowolnego $A \subset M$, każdy podzbiór A-definiowalny w M jest boolowską kombinacją zbiorów postaci $x \geqslant a$, $x \leqslant b$, gdzie a, b leżą w algebraicznym domknięciu zbioru A. Pojęcia te pokrywają się z klasycznym pojęciem o-minimalności w przypadku gęstego porządku liniowego. Mówimy, że teoria struktury częściowo uporządkowanej jest silnie o-minimalna, jeśli wszystkie jej modele są o-minimalne.

Do głównych wyników pracy [NW] należą:

1) równoważność obu tych pojęć w przypadku struktur boolowsko uporządkowanych;

2) twierdzenie mówiące, że jeśli $\mathcal{M}$ jest odpowiednio nasyconym boolowsko uporządkowanym modelem teorii silnie o-minimalnej, to dla każdego podzbioru $A \subset M$ istnieje jedyny, z dokładnością do izomorfizmu nad A, model pierwszy nad A (Twierdzenie 4.6). Dowód istnienia jest alternatywny do dowodu C. Toffaloriego, zaś dowód jedyności jest inspirowany dowodem dla o-minimalnych struktur liniowo uporządkowanych.

Praca [W1] dotyczy takich o-minimalnych teorii struktur boolowsko uporządkowanych, które są małe, tzn. mają przeliczalnie wiele typów zupełnych nad zbiorem pustym. Twierdzenie główne mówi, że każda taka teoria jest $\aleph_0$-kategoryczna, tzn. posiada tylko jeden, z dokładnością do izomorfizmu, model przeliczalny. Podano też elegancki opis zbiorów definiowalnych w modelach takich teorii.

W [W2] udowodniono, że algebry boolowskie ze skończoną ilością atomów nie mają właściwych wzbogaceń z teorią o-minimalną. W dowodzie wykorzystano rozkład zbiorów definiowalnych w modelach o-minimalnej teorii wzbogacenia porządku boolowskiego na skończoną sumę rozłącznych zbiorów definiowalnych o szczególnie prostym opisie, zwanych komórkami.

Prace [W3, W4] poświęcone są słabej eliminacji elementów urojonych w o-minimalnych wzbogaceniach $\mathcal{M}$ algebr Boole'a. Mówimy, że struktura $\mathcal{M}$ ma taką eliminację, gdy dla dowolnej formuły $\varphi(x, y)$, $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$, jej języka i dla dowolnego ciągu parametrów $b \in M^m$, istnieje formuła $\psi(x, z)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ taka, że zbiór tych $c \in M^n$, dla których zbiory definiowane przez $\varphi(x, b)$ i $\psi(x, c)$ są identyczne, jest skończony i niepusty. Główny wynik [W3] mówi, że teoria algebry Boole'a ma słabą eliminację elementów urojonych wtedy i tylko wtedy, gdy algebra ilorazowa $B/I(B)$ jest trywialna lub dwuelementowa; $I(B)$ oznacza tutaj ideał złożony ze wszystkich elementów postaci $x \sqcup y$, gdzie x jest atomowy, a y bezatomowy.

W [W4] uogólniono wyniki i metody poprzedniego artykułu. W szczególności, podana została pewna charakteryzacja własności $|B/I_n(B)| \leqslant 2$, przy czym ideały $I_n(B)$ zdefiniowane są indukcyjnie:

$$I_0(B) := 0, \quad I_{n+1}(B) := \pi^{-1}(I(B/I_n(B))),$$

gdzie $\pi : B \longrightarrow B/I_n(B)$ jest rzutowaniem kanonicznym. Charakteryzacja ta umożliwia znalezienie pewnej naturalnej klasy $\mathcal{E}_B$ 0-definiowalnych relacji równoważnościowych, która ma tę własność, że dowolny element urojony algebry Bool'e B jest interdefiniowalny z elementem urojonym wyznaczonym przez pewną relację z $\mathcal{E}_B$. To z kolei pozwala na sformułowanie eliminacji elementów urojonych w odpowiednim języku wielosortowym.

Praca [W5] dotyczy grup, działań grup i ciał, które są definiowalne w strukturach topologicznych $\mathcal{M}$ pierwszego rzędu wyposażonych w pewną funkcję d na zbiorach definiowalnych o wartościach w $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$. W rozdziałach 3, 4 i 5 przedstawione są kolejno twierdzenia o topologizacji takich grup, ich działań tranzytywnych i ciał.

Dowody tych twierdzeń opierają się na następującej kluczowej idei: przy pewnych warunkach nałożonych na topologię struktury $\mathcal{M}$ i funkcję d, dla grupy definiwalnej $G \subset M^m$ i d-dużego podzbióru definiowalnego V w G, skończona liczba translacji zbioru V pokrywa grupę G (Twierdzenie 2.10).

Jeśli d jest funkcją wymiaru (tzn. spełnia warunek addytywności), a struktura $\mathcal{M}$ spełnia warunek ciągłości względem d i topologii, to grupa G może zostać wyposażona w strukturę definiowalnej grupy topologicznej. Jej topologię konstruuje się poprzez znalezienie pewnego d-dużego podzbioru definiowalnego V w G w taki sposób, że jest on otwarty w topologii grupy G, oraz że topologia ta i topologia przestrzeni obejmującej M^m pokrywają się na V (Twierdzenie 3.5).

Powyższe idee pochodzą od A. Pillaya, który realizował je w sytuacji grup definiowalnych w strukturach o-minimalnych. Podstawowymi składnikami jego dowodu są:

1) obserwacja, że wymiar geometryczny zbiorów definiowalnych pokrywa się z ich wymiarem teorio-modelowym, tzn. rzędem ("rank") ze względu na domknięcie definiowalne;

2) kluczowy lemat o pokryciu grupy definiowalnej G skończoną ilością translacji dużego podzbioru V w G.

Dowód A. Pillaya jest zresztą adaptacją do kontekstu o-minimalnego dowodu E. Hrushovskiego twierdzenia Weila o tym, że grupa algebraiczna nad ciałem algebraicznie domkniętym może być skonstruowana z danych biwymiernych. Twierdzenie A. Pillaya zostało z kolei adaptowane przez Y. Peterzila, A. Pillaya i S. Starchenkę do przypadku tranzytywnego działania definiowalnego grupy na zbiorze.

O ile tylko rozważana struktura jest dostatecznie nasycona, każde stwierdzenie o punkcie generycznym spełniającym pewną własność definiowalną może być zastąpione — jak zauważył już A. Pillay — stwierdzeniem, że zbiór punktów o tej własności jest duży. Możliwość ta pozwoliła Habilitantowi uzyskać wyżej wskazane twierdzenia o topologizacji poprzez rachunek wymiarów, a nie poprzez teorię punktów generycznych. Korzyść stąd płynąca polega m. in. na tym, że nie trzeba ograniczać się do modeli, które są dostatecznie nasycone. Podkreślić należy także, że praca zawiera efektywne oszacowania minimalnej liczby translacji dużego zbioru pokrywających grupę G. Przy pewnych założeniach oszacowanie to wynosi $d(G) + 1$.

Wśród warunków nakładanych na funkcję d występują (rozdział 2): addytywność, słaba addytywność pierwszego i drugiego rodzaju (względem danej funkcji $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_+$), niezmienniczość względem bijekcji definiowalnych, czy też własność ciągłości względem funkcji d i topologii. Wymiar geometryczny w strukturach słabo o-minimalnych nie ma zazwyczaj własności addytywności, ale ma — jak udowodnił Autor w [H4]— własność słabej addytywności pierwszego i drugiego rodzaju (względem funkcji $f(n) = 2^n$). Ponieważ własność silnego rozkładu komórkowego implikuje własność silnej monotoniczności ([H1], Lemat 2.6), z Twierdzenia [H4], 4.2, wynika, że wymiar geometryczny ma w przypadku takich struktur własność addytywności.

Artykuł [W6], poświęcony strukturom słabo o-minimalnym z silnym rozkładem komórkowym, jest kontynuacją prac [H1, H4] (wchodzących w skład rozprawy habilitacyjnej). Jednym z głównych wyników jest tutaj niezmienniczość własności silnego rozkładu komórkowego ze względu na elementarną równoważność (Twierdzenie 2.8). Można stąd łatwo wyprowadzić, podobnie jak dla struktur o-minimalnych, pokrywanie się wymiaru geometrycznego z teoriomodelowym, tzn. rzędem (Propozycja 2.9). Inną konsekwencją jest możliwość zdefiniowania relatywnej wersji (dla zanurzeń elementarnych) kanonicznego rozszerzenia o-minimalnego struktur słabo o-minimalnych z silnym rozkładem komórkowym.

W rozdziale 3 badane są własności związane z włóknami rodzin definiowalnych, które są odpowiednikami rezultatów zachodzących w strukturach o-minimalnych. W rozdziale 4 Autor zajmuje się definiowalnymi relacjami równoważnościowymi, uogólniając rezultaty znane dla struktur o-minimalnych, a dotyczące definiowalności i skończoności liczby klas najwyższego wymiaru (Twierdzenie 4.5), czy też jednostajnej skończoności liczby klas dla definiowalnych rodzin relacji równoważności (Twierdzenia 4.7 i 4.8). Dowody prowadzone są najczęściej przez indukcję względem wymiaru. Jednakże rozumowań znanych w przypadku struktur o-minimalnych nie można tutaj przenieść bezpośrednio, ponieważ silne komórki nie są na ogół zbiorami definiowalnie spójnymi. W końcowej części pracy, udowodniono pewne twierdzenie o eliminacji elementów urojonych w strukturze słabo o-minimalnej z silnym rozkładem komórkowym. Jego dowód wzorowany jest na dowodzie o-minimalnego odpowiednika z pracy A. Pillaya.

Ocena całości

Uważam, że recenzowana rozprawa habilitacyjna stanowi znaczny wkład jej Autora w rozwijaną przez niego dziedzinę matematyki. Pozostały dorobek naukowy dr Romana Wencla nie jest zbyt obszerny: siedem artykułów, w tym trzy obejmujące wyniki rozprawy doktorskiej. Jednakże prace te zawierają istotne rezultaty, a szczególną uwagę chciałbym zwrócić na artykuły [W5, W6], stanowiące kontynuację badań prowadzonych w rozprawie habilitacyjnej, a jednocześnie stosunkowo bliskie moim zainteresowaniom i pracy naukowej. Jestem przekonany, że dorobek naukowy Habilitanta jest wartościowy i świadczy o jego samodzielności i dojrzałości twórczej. Należy także podkreślić jego aktywny udział w wielu międzynarodowych i krajowych konferencjach naukowych, oraz uczestnictwo w grantach polskich (KBN i MNiSW) i 6. Programie Ramowym UE. Był on także kierownikiem grantu MNiSW (jednoosobowego) pt. "Topologiczna teoria modeli". W latach 01.04.2004–31.03.2006 odbywał staż podoktorski na stanowisku *research fellow* w *University of Leeds*.

Podsumowując, w mojej ocenie przedstawiona rozprawa habilitacyjna, dorobek naukowy i działalność naukowa spełniają ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane kandydatom do stopnia naukowego doktora habilitowanego. Wnoszę zatem o dopuszczenie kandydata do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

Krzysztof Nowak

Literatura

[MMS] D. Macpherson, D. Marker, C. Steinhorn, *Weakly o-minimal structures and real closed fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 5435–5483.

[NW] L. Newelski, R. Wencel, *Definable sets in Boolean ordered o-minimal structures. I*, J. Symbolic Logic **66** (2001), 1821–1836.

[H1] R. Wencel, *Weakly o-minimalnon-valuational structures*, Ann. Pure Appl. Logic **154** (2008), 139–162.

[H2] —, *On expansions of weakly o-minimal non-valuational structures by convex predicates*, Fund. Math. **202** (2009), 147–159.

[H3] —, *Weakly o-minimal expansions of ordered fields of finite transcendece degree*, Bull. London Math. Soc. **41** (2009), 109–116.

[H4] —, *Topological properties of sets definable in weakly o-minimal structures*, J. Symbolic Logic **75** (2010), 841–863.

[W1] —, *Small theories of Boolean ordered o-minimal structures*, J. Symbolic Logic **67** (2002), 1385–1390.

[W2] —, *Definable sets in Boolean ordered o-minimal structures. II*, J. Symbolic Logic **68** (2003), 35–51.

[W3] —, *Weak elimination of imaginaries for Boolean algebras*, Ann. Pure Appl. Logic **132** (2005), 247–270.

[W4] —, *Imaginaries in Boolean algebras*, Math. Logic Quart. **58** (2012), 217–235.

[W5] —, *Groups, group actions and fields definable in first-order topological structures*, Math. Logic Quart. **58** (2012), 449–467.

[W6] —, *On the strong cell decomposition property for weakly o-minimal structures*, Math. Logic Quart., praca zaakceptowana.