

Recenzja rozprawy habilitacyjnej
nt. *Bazy Bernsteina: dualność i zastosowania*
oraz pozostałego dorobku naukowego
dra Pawła Woźnego

1. ROZPRAWA

1.1 WSTĘP

W swojej rozprawie habilitacyjnej, DR PAWEŁ WOŹNY zajmuje się problemami związanymi z wielomianowymi bazami Bernsteina i ich uogólnieniami. O ile wielomiany Bernsteina jednej zmiennej i niektóre ich ważne własności teoretyczne znane są już od stu lat, stosunkowo niedawno odkryto ich zadziwiającą przydatność w modelowaniu komputerowym, w szczególności jako bardzo wygodne narzędzie służące reprezentacji i przetwarzaniu gładkich krzywych i płatów, powszechnie obecnych np. w grafice komputerowej. Właśnie zastosowania praktyczne są powodem wzmożonego zainteresowania tego typu wielomianami w ostatnich latach, a liczne publikacje na ten temat idą przede wszystkim w kierunku konstrukcji algorytmów numerycznych wykorzystujących ich własności teoretyczne.

Badania DRA P. WOŹNEGO znajdują motywację we wspomnianych praktycznych zastosowaniach. Przedmiotem zainteresowania są uogólnienia klasycznych wielomianów Bernsteina i ich dualnych odpowiedników, istotnych z punktu widzenia znajdowania rozwiązań zagadnień minimalizacyjnych związanych z konstrukcją i wygładzaniem krzywych i płatów Béziera. Badaniom teoretycznym towarzyszą konstrukcje istotnie nowych i efektywniejszych od dotychczas istniejących algorytmów numerycznych.

Rozprawa habilitacyjna składa się z następujących sześciu prac:

- H1: S. Lewanowicz, P. Woźny, Connections between two-variable Bernstein and Jacobi polynomials on the triangle, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **197** (2006) 520–533.
- H2: S. Lewanowicz, P. Woźny, Dual generalized Bernstein basis, *Journal of Approximation Theory* **138** (2006) 129–150.
- H3: S. Lewanowicz, P. Woźny, Two-variable orthogonal polynomials of big q -Jacobi type, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **233** (2010) 1554–1561.
- H4: P. Woźny, Simple algorithms for computing the Bézier coefficients of the constrained dual Bernstein polynomials, *Applied Mathematics and Computation* **219** (2012) 2521–2525

- H5: S. Lewanowicz, P. Woźny, Constrained multi-degree reduction of triangular Bézier surfaces, using dual Bernstein polynomials, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **235** (2010) 785–804.
- H6: S. Lewanowicz, P. Woźny, Multi-degree reduction of Bézier curves with constraints, using dual Bernstein basis polynomials, *Computer Aided Geometric Design* **26** (2009) 566–579.

1.2 WYNIKI

Prace wchodzące w skład habilitacji można generalnie podzielić na dwie kategorie: prace czysto teoretyczne i prace teoretyczno-algorytmiczne. W pierwszej kategorii mieszczą się [H1, H2, H3], a w drugiej [H4, H5, H6].

W [H1] rozpatrywane są trójkątne wielomiany Bernsteina dwóch zmiennych. Pokazano procedury przejścia od bazy Bernsteina do bazy ortogonalnej trójkątnych wielomianów Jacobiego dwóch zmiennych i odwrotnie. Współczynniki macierzy przejścia wyrażone są, m.in., poprzez wielomiany Hahna. Rozwiązane jest też analogiczne zadanie dla wielomianów dualnych Bernsteina.

Praca [H2] poświęcona jest bazom dualnym do uogólnionych wielomianów Bernsteina jednej zmiennej. Najogólniejsza wersja wielomianów Bernsteina została zaproponowana przez tych samych autorów w pracy z 2004 roku (nie wchodzącej w skład habilitacji), jako rozwinięcie idei q -bazy Bernsteina autorstwa Philipsa. W [H2] podano formuły na reprezentację wielomianów dualnych w języku dużych wielomianów Jacobiego oraz formuły odwrotne. Tutaj również okazuje się, że pomocne są wielomiany q -Hahna. Jako przypadek szczególny, rozpatrzono wielomiany dualne do wielomianów klasycznych.

W związanej pracy [H3] zdefiniowano dwuwymiarowe duże kwantowe wielomiany ortogonalne typu Jacobiego, bazując na wielomianach jednowymiarowych q -Jacobiego, oraz pokazano ich ortogonalność względem odpowiedniej wagi.

W jeszcze krótszej pracy [H4] zaproponowano prosty algorytm obliczania współczynników rozwinięcia Bézier'a dla dualnych wielomianów Bernsteina jednej zmiennej z ograniczeniami. Wielomiany dualne Bernsteina (w L_2) zdefiniował po raz pierwszy Ciesielski w 1987r. W roku 1998 Jittler podał prosty, ale wolny algorytm obliczania dualnych wielomianów Bernsteina, potem uogólniany przez Rababah'a i Al-Natour'a. Podstawą nowego algorytmu habilitanta jest dwuwymiarowa formuła rekurencyjna pozwalająca obliczyć współczynniki w czasie $O(n)$, gdzie n jest stopniem wielomianu, a więc optymalnie.

W pracach [H5] i [H6] rozpatrywany jest algorytmiczny problem obniżania stopnia krzywych i płatów Bézier'a, polegający w ogólności na zastąpieniu danego wielomianu Bézier'a wielomianem Bézier'a o mniejszym stopniu najbliższym oryginalnemu, względem określonego funkcjonału 'odległości'. Jest to ważny problem praktyczny związany, m.in., z kompresją obrazów. Tradycyjna metoda polegająca na zastąpieniu postaci Bézier'a rozwinięciem w pewnej bazie ortogonalnej (np. Jacobiego), rozwiązaniu zadaniu w tej bazie ortogonalnej i przejściu

odwrotnym do bazy Bézier'a, jest dość kosztowna. W [H5] i [H6] udało się zgrabnie wykorzystać pokazane wcześniej własności (dualnych) baz Bernsteina, aby ten koszt istotnie obniżyć.

Dokładniej, w [H5] zajmowano się trójkątnymi powierzchniami Bézier'a z ustalonymi punktami kontrolnymi. Zaproponowana metoda działa w czasie $O(n^2m^2)$ gdzie n i m są odpowiednio stopniami powierzchni oryginalnej i wynikowej. Algorytm polega na sprytnym wykorzystaniu pewnych własności rekurencyjnych wielomianów dwóch zmiennych Hahna i dualnych dyskretnych wielomianów Bernsteina. Pracę uzupełniają przykłady numeryczne.

Natomiast w [H6] zaprezentowano nowe podejście do obniżania stopnia krzywych Bézier'a z ograniczeniami, w jednym wymiarze. Wykorzystano dualne wielomiany Bernsteina z ograniczeniami, związanymi z iloczynem skalarnym Jacobiego. Algorytm działa w rekordowym czasie $O(mn)$. Podobnie jak w [H5], pracę uzupełniają przekonujące testy numeryczne.

1.3 UWAGI

Przedstawiona rozprawa habilitacyjna stanowi zwartą tematycznie całość. Chociaż natura tematu rozprawy nie wymaga użycia bardzo zaawansowanego aparatu, przedstawione dowody i rozwiązania wymagały znajomości i kojarzenia wielu faktów teorii wielomianów oraz dużej sprawności rachunkowej, a przez to nie należą do łatwych. Trzeba podkreślić, że uzyskane wyniki mają znaczenie zarówno teoretyczne jak i praktyczne. To połączenie rozwiązań praktycznych wyrażonych w postaci konkretnych algorytmów i ich implementacji z daleko poza praktykę wykraczającymi badaniami teoretycznymi wydaje się szczególnie cenne.

Jak zaznaczono we wstępie, reprezentacja i przetwarzanie krzywych i płatów są obecnie bardzo popularne i ważne w środowisku zajmującym się modelowaniem i grafiką komputerową. Wyniki przedstawione w rozprawie dopisują ważny rozdział do tej tematyki. (Baza *Web of Science* pokazuje 11, 14, 3, 1, 4, 13 cytowań dla, odpowiednio, prac [H1-H6].)

Wśród sześciu prac wchodzących w skład rozprawy, habilitant jest samodzielnym autorem jedynie pracy [H4], zaś współautorem pozostałych jest prof. S. Lewanowicz. Sam fakt współautorstwa nie jest oczywiście niczym negatywnym (przy obecnych środkach komunikacji pisanie prac współautorskich jest niemal regułą), ale karze dzielić dokonania pomiędzy współautorów. Zgodne oświadczenia zarówno prof. Lewanowicza jak i DRA WOŹNEGO nie pozostawiają wątpliwości. Nawet jeśli prof. Lewanowicz był inspiratorem wielu pomysłów, wkład habilitanta jest więcej niż wystarczający dla habilitacji.

Autor recenzji chciałby dodać, że przedstawione materiały, a w szczególności "Autoreferat rozprawy habilitacyjnej", zostały przez habilitanta bardzo dobrze przygotowane, przez co w znacznym stopniu ułatwiły ocenę rozprawy.

2. DOROBEK

Rozprawa habilitacyjna stanowi jedynie część dorobku naukowego DRA P. WOŹNEGO zgromadzonego po uzyskaniu stopnia doktora. Jest on bowiem (współ-)autorem wielu innych

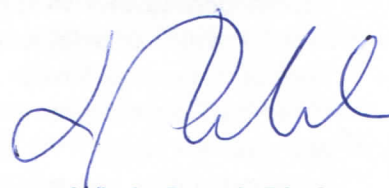
publikacji naukowych, które ukazały się w czołowych czasopismach właściwych tej tematyce. *Web of Science* pokazuje poza habilitacją 20 prac w Applied Mathematics and Computation, Applied Numerical Mathematics, BIT Numerical Analysis, Integral Transforms and Special Functions, Journal of Computational and Applied Mathematics, Numerical Algorithms.

Wyniki habilitanta spotykają się z zainteresowaniem i uznaniem środowiska naukowego, o czym świadczą, m.in., indeks cytowań (aktualnie 104 cytowania, indeks Hirscha 5, według *Web of Science*) oraz zaproszone wystąpienia na konferencjach krajowych i międzynarodowych.

Dorobek poza habilitacją należy więc ocenić na więcej niż wystarczający. Stwierdzenie to nieco osłabia fakt, że, podobnie jak w przypadku rozprawy, tylko dwie ze wspomnianych prac są samodzielnego autorstwa habilitanta. Zwraca uwagę również to, że właściwie wszystkie prace dotyczą w mniejszym lub większym stopniu tematyki powiązanej z wielomianami Bernsteina. Autor tych słów ma nadzieję, że w przyszłości DR P. WOŹNY nieco rozszerzy spektrum swoich zainteresowań.

3. KONKLUZJA

Podsumowując, zarówno rozprawę habilitacyjną jak i pozostały dorobek DRA P. WOŹNEGO uzyskany po otrzymaniu stopnia doktora oceniam bardzo pozytywnie. Pomimo młodego wieku, należy on już do czołowych specjalistów zajmujących się teorią i zastosowaniami baz typu Bernsteina i ma swój istotny wkład w tą tematykę. Jestem przekonany, że DR PAWEŁ WOŹNY zasługuje na otrzymanie stopnia doktora habilitowanego.



dr hab. Leszek Plaskota
Warszawa, 30 sierpnia 2013