AUTOREFERAT

1. Imię i nazwisko

Błażej Wróbel

2. Dyplomy i stopnie naukowe

- Uniwersytet Wrocławski i Scuola Normale Superiore, Piza
  Doktor matematyki (dokotrat co-tutelle), dyplom obroniony z wyróżnieniem w 2014 r.

  Promotorzy: prof. Fulvio Ricci, prof. Krzysztof Stempak
  Tytuł: "Wielowymiarowe mnożniki spektralne".

- Politechnika Wrocławska
  Magister inżynier matematyki teoretycznej, dyplom obroniony w 2010 r.

3. Historia zatrudnienia w jednostkach naukowych

- Uniwersytet Wrocławski
  stanowisko asystenta: 01.10.2014-30.09.2016, stanowisko adiunkta: od 1.10.2016.

- University of Bonn, Bonn, Niemcy
  HCM Postdoctoral research fellowship, 01.02.2016-28.02.2018

  Mentor: prof. Christoph Thiele.

- Universitá di Milano-Bicocca, Milan, Italy
  Postdoctoral fellowship, 1.02.2015-31.01.2016

  Mentor: prof. Stefano Meda.

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz stopniach i tytule w zakresie sztuki

4.1. **Tytuł osiągnięcia naukowego.**

Rachunki funkcyjne i ich zastosowania

4.2. **Prace stanowiące osiągnięcie naukowe.**

[H1] B. Wróbel. On the consequences of a Mihlin-Hörmander functional calculus: maximal and square function estimates, *Mathematische Zeitschrift* **287** (2017), pp. 143-153.

[H2] B. Wróbel. Approaching bilinear multipliers via a functional calculus. *Journal of Geometric Analysis* (2018), https://doi.org/10.1007/s12220-017-9945-6.

[H3] J. Dziubański, B. Wróbel. Strong continuity on Hardy spaces, *J. Approx. Theory* **211** (2016), pp. 85–93.

[H4] B. Wróbel. Dimension-free L^p estimates for vectors of Riesz transforms associated with orthogonal expansions. *Analysis & PDE* **11** (2018), no. 3, 745-773.

[H5] D. Celotto, S. Meda, B. Wróbel. L^p spherical multipliers on homogeneous trees, *Studia Mathematica*, przyjęte do publikacji w lutym 2018, DOI: 10.4064/sm170626-23-2, arXiv:1607.05502.

4.3. **Omówienie celu naukowego wyżej wymienionych prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.** W pierwszych dwóch podsekcjach wprowadzimy pojęcie rachunków funkcyjnych oraz przedstawimy najnowsze postępy w analizie harmonicznej związane z rachunkami funkcyjnymi. Naszym celem jest tu także zaprezentowanie niektórych motywacji do badania problemów rozprawy habilitacyjnej.

W następnych 5 podsekcjach, których tytuły są tożsame z **H1**, **H2**, **H3**, **H4**, **H5**, opiszemy główne wyniki habilitacji.

Problemy zbadane w rozprawie habilitacyjnej zaowocowały

a) nowymi zastosowaniami rachunków funkcyjnych w analizie harmonicznej
b) rozwinięciem rachunków funkcyjnych dla nowych operatorów.

Przed przystąpieniem do opisu szczegółowego omówimy krótko każdy z artykułów stanowiących osiągnięcie naukowe.

- W pracy **H1** badaliśmy konsekwencje posiadania przez operator L rachunków funkcyjnych typu Mihlina-Hörmandera. Udowodniliśmy, że istnienie rachunków funkcyjnych typu Mihlina-Hörmandera dla L na L^p, $1 < p < \infty$, automatycznie implikuje ograniczoność na L^p funkcji maksymalnych $\sup_{t>0} |m(tL)f|$ i kwadratowych $\big(\int_0^\infty |m(tL)f|^2\, t^{-1}\, dt\big)^{1/2}$, opartych na gładkiej funkcji m o nośniku zwartym (dla funkcji kwadratowej trzeba jeszcze założyć, że $m(0) = 0$). Wynik ten uzupełnia wcześniejsze prace Cowling [29] i Cowling et al. [30]. Z artykułów tych wynika bowiem, że bez założenia o posiadaniu przez L rachunków funkcyjnych typu Mihlina-Hörmandera, musimy rozważać holomorficzne funkcje m zarówno w funkcji kwadratowej jak i maksymalnej.
- W **H2** opracowaliśmy ogólne podejście do operatorów dwuliniowych zdefiniowanych przez rachunki funkcyjne. Ściślej, rozważaliśmy tam operatory postaci
$$B_m(f_1, f_2)(x) := m(L_1, L_2)(f_1 \otimes f_2)(x, x),$$
gdzie $L_1 = I \otimes L$ i $L_2 = L \otimes I$. Jednym z głównych założeń w **H2** było posiadanie przez L rachunków funkcyjnych typu Mihlina-Hörmandera. Drugim głównym założeniem był wzór, który gwarantował dobre zachowanie mnożników spektralnych względem punktowego mnożenia. Pod tymi założeniami udowodniliśmy w **H2** ograniczoność B_m z $L^{p_1} \times L^{p_2}$ do L^p; gdzie $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$. Wynik ten jest uogólnieniem i analogonem twierdzenia Coifmana-Meyera poza kontekst fourierowski. Jako wnioski otrzymaliśmy także w **H2** różne ułamkowe reguły Leibniza. Przykłady do których stosuje się nasza teoria, to m.in.: dyskretny laplasjan, dwu-liniowe, radialne mnożniki Dunkla oraz rozwinięcia Jacobiego.
- W **H3** zajmowaliśmy się mocną ciągłością mnożników spektralnych na przestrzeni Hardy'ego H^1_L. Przestrzeń H^1_L to abstrakcyjna przestrzeń Hardy'ego zdefiniowana przez Hoffman, et al. [64] dla operatorów L, które spełniają oszacowania Davies'a-Gaffney'a (vide (DG)). W szczególności pokazaliśmy, że półgrupa ciepła e^{-tL} jak i urojone potęgi L^{iu} są mocno ciągłe na H^1_L, tzn.
$$\lim_{t\to 0^+} e^{-tL} f = f, \qquad \lim_{u\to 0} L^{iu} f = f,$$
gdzie granica jest rozumiana w sensie H^L_1. Oszacowania Davies'a-Gaffney'a są implikowane przez punktowe oszacowania gaussowskie jądra półgrupy e^{-tL}, dlatego nasze wyniki stosują się do dużej klasy operatorów. W dowodach głównych wyników ważną rolę pełniły rachunki funkcyjne typu Mihlina-Hörmandera na H^1_L otrzymane przez Dziubańskiego i Preisnera w [42].
- W pracy **H4** otrzymaliśmy oszacowania niezależne od wymiaru dla szerokiej klasy transformat Riesza związanych z rozwinięciami ortogonalnymi. Rozważane były transformaty Riesza postaci $R_j = \delta_j L^{-1/2}$, gdzie $L = \sum_{j=1}^d \delta_j^* \delta_j + a_j$. Tutaj δ_j jest pewnym operatorem pierwszego rzędu, δ_j^* jego formalnym sprzężeniem, zaś a_j jest nieujemną stałą. Jedną z głównych trudności do przezwyciężenia był fakt, że δ_j i δ_j^* nie muszą komutować. Pomimo tego udało nam się udowodnić wzór, który pozwala wyrazić R_j przez operatory łatwiejsze w analizie (półgrupę Poissona i jej modyfikacje). Wzór ten wraz z metodą funkcji Bellmana pozwolił nam w wielu przypadkach rozwinięć ortogonalnych na udowodnienie oszacowania
$$\Big\|\Big(\sum_{j=1}^d |R_j f|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p} \leqslant 48 \max(p, (p-1)^{-1} \|f\|_{L^p}, \qquad 1 < p < \infty.$$

- W **H5** przedstawiliśmy charakteryzację mnożników sferycznych na drzewie jednorodnym. Pokazaliśmy mianowicie, że mnożnik sferyczny z funkcją mnożnikową m jest ograniczony na przestrzeni L^p dla drzewa wtedy i tylko wtedy gdy m rozszerza się okresowo do funkcji holomorficznej w pewnym prostokącie na płaszczyźnie zespolonej oraz wartości brzegowe m definiują ograniczone mnożniki na przestrzeni L^p dla liczb całkowitych.

4.3.1. *Wstęp.* Przed przystąpieniem do bardziej szczegółowego opisu prac stanowiących osiągnięcie naukowe musimy wprowadzić niezbędne pojęcia i definicje.

Niech L będzie (ograniczonym lub nieograniczonym) operatorem na przestrzeni Banacha $\mathcal{B}$. Czy dla funkcji $m\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ można w rozsądny sposób zdefiniować operator $m(L)$? Jeśli tak, to czy da się to zrobić w sposób 'ciągły'. Pytania te leżą u podstaw działu analizy funkcjonalnej znanego jako *rachunki funkcyjne*.

Jeśli A jest macierzą, to oczywiście możemy zdefiniować $p(A)$ dla każdego wielomianu p. Czy jednak można to zrobić dla funkcji p innych niż wielomiany? Odpowiedzi na to pytanie udziela klasyczne twierdzenia spektralne dla macierzy. To tutaj możemy się doszukiwać początków rachunków funkcyjnych. Rzeczywiście, jeśli A jest macierzą samosprzężoną wymiaru $n \times n$ to twierdzenie spektralne orzeka, że $A = UBU^*$, gdzie U jest macierzą unitarną, zaś B jest macierza diagonalną o współczynnikach $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. W tym przypadku możemy łatwo zdefiniować $m(A) = Um(B)U^*$, gdzie $m(B)$ jest macierzą diagonalną o współczynnikach $m(\lambda_1), \ldots, m(\lambda_n)$.

Niech $\mathcal{A}$ będzie przestrzenią Banacha, której elementami są funkcje z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{R}$ i niech $\mathcal{B}$ będzie przestrzenią Banacha. Załóżmy, że odwzorowanie

$$T(m) = m(L)$$

określa jednoznacznie ograniczony operator $m(L)$ na $\mathcal{B}$ dla funkcji $m \in \mathcal{A}$. Wymagamy aby T było liniowe oraz $T(m_1 \cdot m_2) = T(m_1)T(m_2)$. Mówimy wówczas, że L posiada (lub ma) *$\mathcal{A}$-rachunki funkcyjne na $\mathcal{B}$* jeśli

$$\|m(L)\|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} \leqslant C(\mathcal{B}, L)\|m\|_{\mathcal{A}}, \qquad m \in \mathcal{A}. \tag{4.1}$$

Zwróćmy uwagę, że choć operator L może być nieograniczony, to zdefiniowany powyżej rachunek funkcyjny pozwala otrzymać tylko ograniczone operatory $m(L)$. Istnieją rachunki funkcyjne (jak na przykład Borelowski rachunek funkcyjny z twierdzenia spektralnego) w których operator $m(L)$ może być nieograniczony. Takie rachunki funkcyjne nie będą jednak istotne dla habilitacji. Podsumowując, jeśli L ma *$\mathcal{A}$-rachunki funkcyjne* na $\mathcal{B}$, to wówczas $m(L)$ jest jednoznacznie zdefiniowany i ograniczony na $\mathcal{B}$ dla $m \in \mathcal{A}$.

W przypadku gdy $\mathcal{B}$ jest przestrzenią Hilberta satysfakcjonujące do większości zastosowań rachunki funkcyjne są konsekwencją twierdzenia spetktralnego. Mianowicie, dla (ograniczonego bądź nieograniczonego) samosprzężonego operatora L na przestrzeni Hilberta H, twierdzenie spektralne pozwala nam zdefiniować $m(L)$ dla dowolnej funkcji Borelowskiej $m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. W tym przypadku L posiada *Borelowskie L^∞ rachunki funkcyjne*. Rzeczywiście, twierdzenie spektralne implikuje

$$\|m(L)\|_{H\to H} \leqslant \|m\|_{L^\infty(\sigma(L))}, \tag{4.2}$$

dla dowolnej borelowsko mierzalnej funkcji m na $\sigma(L)$-(istotnym) spektrum L. Zauważmy, że w tym przypadku $\sigma(L) \subseteq \mathbb{R}$, zatem możemy rozważać tylko funkcje określone na prostej rzeczywistej. Co więcej, jeśli L jest nieujemny to możemy ograniczyć się do $m\colon [0, \infty] \to \mathbb{C}$.

Ogólność z poprzedniego akapitu jest rzadko spotykana gdy $\mathcal{B}$ nie jest przestrzenią Hilberta. Aby uzyskać użyteczne rachunki funkcyjne potrzebujemy zwykle mocniejszych założeń o operatorze L i o funkcji m. Z punktu widzenia habilitacji najbardziej istotne są dwa rodzaje rachunków funkcyjnych w przypadku gdy $\mathcal{B} = L^p$[1] dla pewnego $1 < p < \infty$. Pierwszym z nich są *H^∞ (lub holomorficzne) rachunki funkcyjne*. Mówimy, że operator L posiada H^∞ rachunki funkcyjne na $\mathcal{B}$ jeśli możemy wziąć jako $\mathcal{A}$ przestrzeń Banacha ograniczonych funkcji holomorficznych na zbiorze otwartym $U \subseteq \mathbb{C}$. Mianowicie, kiedy zachodzi

$$\|m(L)\|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} \leqslant C(\mathcal{B}, L)\|m\|_{H^\infty(U)},$$

[1] Dla przestrzeni X, σ-ciała Σ na X i miary ν na Σ przez $L^p = L^p(X, \Sigma, \nu)$ zawsze oznaczamy przestrzeń Banacha funkcji Σ-mierzalnych na X, które są całkowalne z p-tą potęgą. Norma na L^p jest zadana przez $\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f(x)|\, d\nu(x)\right)^{1/p}$. Jeśli X, Σ lub ν są znane z kontekstu, będziemy je pomijać, pisząc np. L^p lub $L^p(X)$.

gdzie $\|m\|_{H^\infty(U)} = \sup_{z\in U}|m(z)|$. Drugim istotnym z naszego punktu widzenia rodzajem rachunków funkcyjnych są rachunki funkcyjne *(typu) Mihlina-Hörmandera*. W tym wypadku ustalamy liczbę naturalną N a za $\mathcal{A}$ bierzemy przestrzeń funkcji dla których

$$\|m\|_{MH(N)} = \sup_{j=0,\dots,N}\sup_{\lambda>0}|\lambda^j\frac{d\lambda^j}{d\lambda^j}m(\lambda)| < \infty. \tag{4.3}$$

Mówimy wówczas, że L ma rachunki Mihlina-Hörmandera na $\mathcal{B}$ rzędu N (co czasem skracamy jako MH-rachunki funkcyjne) jeśli

$$\|m(L)\|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} \leqslant C(\mathcal{B},L)\|m\|_{MH(N)}.$$

Zauważmy, że m jest teraz funkcją z $(0,\infty)\to\mathbb{R}$ zatem MH-rachunki funkcyjne są dobrze dostosowane do operatorów 'dodatnich'.

Warto wspomnieć, że istnieje wiele operatorów które mają H^∞ rachunki funkcyjne, ale nie mogą mieć MH-rachunków funkcyjnych. Przykładami są tu operator Ornsteina-Uhlenbecka (vide [62]) a także laplasjan na przestrzeni symetrycznej typu niezwartego (vide [24]).

Rozwijanie różnych rodzajów rachunków funkcyjnych jest dziedziną która leży na styku teorii operatorów i analizy harmonicznej. Otrzymane w ten sposób rachunki funkcyjne mają często bezpośrednie zastosowania w równaniach różniczkowych cząstkowych, zwłaszcza w równaniach ewolucji. Postaramy się to zilustrować dwoma przykładami.

Rozważmy równanie różniczkowe cząstkowe

$$\partial_t u(t,x) + Lu(t,x) = 0, \tag{4.4}$$

z warunkiem początkowym $u(0,x) = f(x)$, dla pewnego f należącego do przestrzeni Banacha $\mathcal{B}$. Szukamy rozwiązań (4.4) zależnych w sposób ciągły od danej $f\in X$. Przykładem (4.4) jest równanie ciepła na $\mathcal{B} = L^p(\mathbb{R}^d)$, dla pewnego $1\leqslant p\leqslant\infty$. Wówczas L jest minus operatorem Laplace'a na $\mathbb{R}^d$. Gdyby L było liczbą to oczywistym rozwiązaniem (4.4) byłoby $e^{-tL}f(x)$. W zależności od przestrzeni Banacha $\mathcal{B}$ i operatora L różne rodzaje rachunków funkcyjnych pozwalają nam nadać formalną definicję e^{-tL} jako ciągłemu operatorowi na $\mathcal{B}$. Oczywiście w tym przypadku e^{-tL} jest półgrupą, zatem mamy do dyspozycji metody teorii półgrup. W przypadku równań różniczkowych cząstkowych podobnych do (4.4) jak np.

$$\partial_t^2 u(t,x) + Lu(t,x) = 0 \qquad \text{(równanie fali)}$$
$$\partial_t^2 u(t,x) - Lu(t,x) = 0 \qquad \text{(równanie Laplace'a w górnej półpłaszczyźnie)}$$
$$\partial_t u(t,x) - iLu(t,x) = 0 \qquad \text{(równanie Schrödinger'a)},$$

znajdowanie ich rozwiązań sprowadza się znowu do otrzymania rachunków funkcyjnych dla L na odpowiedniej przestrzeni Banacha $\mathcal{B}$. Dla trzech powyższych równań musimy umieć zdefiniować formalnie jako ciągłe operatory na $\mathcal{B}$ wyrażenia $\cos(tL^{-1/2})$, $\exp(-tL^{1/2})$, oraz $\exp(-itL)$.

Rachunki funkcyjne na L^p są także blisko związane z nierównościami różniczkowymi. Dobrym przykładem jest tu klasyczna nierówność Sobolewa na $\mathbb{R}^d$, która orzeka, że

$$\|f\|_{L^q} \leqslant C_{p,q}\|f\|_{W^{p,1}}, \qquad 1/p - 1/q = 1/d. \tag{4.5}$$

Symbol $W^{p,1}$ oznacza przestrzeń Sobolewa

$$W^{p,1} = \{f\in L^p(\mathbb{R}^d,dx)\colon f\in L^p,\ \partial_j f\in L^p(\mathbb{R}^d,dx),\ j=1,\dots,d\},$$

z normą

$$\|f\|_{W^{p,1}} = \|f\|_{L^p} + \sum_{j=1}^d \|\partial_j f\|_{L^p}.$$

Rzeczywiście, (4.5) jest konsekwencją ograniczoności z L^p do L^q potencjału Riesza $(-\Delta)^{-1/2}$ (rachunek funkcyjny dla laplasjanu), oraz ograniczoności na L^p transformat Riesza $\partial_j(-\Delta)^{-1/2}$ (rachunki funkcyjne dla pochodnych cząstkowych).

W analizie harmonicznej typową metodą otrzymywania rachunków funkcyjnych na przestrzeniach Banacha $\mathcal{B}$ jak L^p lub przestrzeń Hardy'ego H^1 jest wykorzystanie jako pierwszego kroku Borelowskiego L^∞ rachunku funkcyjnego na L^2. Opiszemy tę procedurę w przypadku gdy $\mathcal{B} = L^p$. Zaczynamy z samosprzężonym (często także nieujemnym) operatorem L na L^2. Wówczas, na mocy twierdzenia spektralnego, dla ograniczonej funkcji $m\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ możemy zdefiniować $m(L)$ jako ciągły operator na L^2. Ponieważ $L^2\cap L^p$ jest gęste w L^p w ten sposób określiliśmy także $m(L)$ na gęstej podprzestrzeni L^p.

Pozostaje sprawdzić, że $m(L)$ określa ograniczony operator na L^p dla m z odpowiedniej przestrzeni $\mathcal{A}$. Operatory $m(L)$ otrzymane zgodnie z powyższą procedurą są nazywane *mnożnikami spektralnymi*. Duża część materiału stanowiącego habilitację jest lub może być wyrażona w terminach mnożników spektralnych.

Biorąc pod uwagę poprzedni akapit, częsta strategia otrzymywania rachunków funkcyjnych na L^p może być z grubsza podsumowana następująco. Pierwszym krokiem jest użycie rachunków funkcyjnych na L^2 z twierdzenia spektralnego celem rozbicia badanego operatora na wiele składników. Drugim krokiem jest użycie założeń (na temat L lub przestrzeni) celem oszacowania każdego z tych składników. Oba kroki są często wyzwaniem; zwykle nie jest łatwo zobaczyć jakie rozbicie jest odpowiednie a także jak użyć skromnych założeń aby oszacować każdy ze składników.

Podejście do rachunków funkcyjnych przez mnożniki spektralne uogólnia się rownież do układów komutujących operatorów. Poniżej opiszemy krótko to uogólnienie. Niech $L = (L_1, \ldots, L_d)$ będzie układem operatorów samosprzężonych na $L^2(X, \nu)$, dla pewnej σ-skończonej przestrzeni miarowej $(X, \nu) = (X, \Sigma, \nu)$. Zakładamy, że operatory L_j mocno komutują, przez co rozumiemy, że ich rzuty spektralne E_{L_j}, $j = 1, \ldots, d$, komutują parami. W tym przypadku istnieje łączna miara spektralna E związana z L i jednoznacznie określona przez warunki

$$L_j = \int_{\mathbb{R}} \lambda_j dE_{L_j}(\lambda_j) = \int_{\mathbb{R}^d} \lambda_j dE(\lambda),$$

vide [108, Theorem 4.10 and Theorems 5.21, 5.23]. Wówczas, dla funkcji borelowskiej $m\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, wielowymiarowe twierdzenie spektralne pozwala nam zdefiniować operator

$$m(L) = m(L_1, \ldots, L_d) = \int_{\mathbb{R}^d} m(\lambda) dE(\lambda) \tag{4.6}$$

z dziedziną

$$\mathrm{Dom}(m(L)) = \left\{ f \in L^2(X, \nu)\colon \int_{\mathbb{R}^d} |m(\lambda)|^2 dE_{f,f}(\lambda) < \infty \right\}.$$

Powyżej $E_{f,f}$ jest nieujemną miarą określoną przez $E_{f,f}(\cdot) = \langle E(\cdot)f, f\rangle_{L^2(X,\nu)}$. Wielowymiarowe mnożniki spektralne zdefiniowane w (4.6) spełniają nierówność analogiczną do (4.2), mianowicie

$$\|m(L_1, \ldots, L_d)\|_{L^2(X,\nu)\to L^2(X,\nu)} \leqslant \|m\|_{L^\infty(\sigma(L_1,\ldots,L_d))}, \tag{4.7}$$

gdzie $\sigma(L_1, \ldots, L_d)$jest łącznym spektrum L. Innymi słowy, możemy powiedzieć, że wielowymiarowe mnożniki spektralne pozwalają otrzymać Borelowskie L^∞ łączne rachunki funkcyjne dla układu L na L^2.

Są jednak sytuacje w których badany operator jest funkcją dwóch niekomutujących operatorów. Dla przykładu, może on być postaci $R = \delta L^{-1/2}$, gdzie δ i L nie komutują. Operator R to modelowy przykład transformat Riesza, zarówno klasycznych, jak i bardziej ogólnych (np. na grupach Liego lub związanych z rozwinięciami ortogonalnymi). W przypadku ogólnym nie możemy otrzymać łącznych rachunków funkcyjnych jak w (4.6) dla pary (δ, L), nawet na przestrzeni L^2. Mogą jednak istnieć szczególne formuły typu rachunków funkcyjnych, które pozwalają zapisać R za pomocą lepiej rozumianych operatorów związanych z δ i L.

4.3.2. *Krótki rys historyczny.* Twierdzenie spektralne dostarcza wysoce satysfakcjonujących rachunków funkcyjnych w przypadku gdy $\mathcal{B}$ jest przestrzenią Hilberta. Dlatego w autoreferacie skoncentrujemy się na rachunkach funkcyjnych dla innych przestrzeni Banacha.

W jednym z najważniejszych przypadków gdy $\mathcal{B} = L^p$ zaś L jest operatorem Laplace'a na torusie $\mathbb{T}$, pierwsze rachunki funkcyjne Mihlina-Hörmandera można wywnioskować z pracy Marcinkiewicza [77] z lat 30. . Theorème 1 z tej pracy implikuje, że L ma rachunki funkcyjne Mihlina-Hörmandera rzędu 1 na $L^p(\mathbb{T})$. Słynne twierdzenia mnożnikowe Hörmandera [65] i Mihlina [91] mówią, że stwierdzenie to jest prawdziwe także dla laplasjanu na $\mathbb{R}^d$.

Począwszy od lat 70. wielu autorów badało różne rodzaje rachunków funkcyjnych na przestrzeniach L^p dla mnożników spektralnych związanych z ogólnymi operatorami. Ta linia badań ma swoje początki w monografii Steina [110] i jego ogólnym twierdzeniu mnożnikowym. Mówimy, że operator L generuje *symetryczną półgrupę dyfuzji* [2] na pewnej przestrzeni mierzalnej $X = (X, \nu, \Sigma)$ jeśli

I) L jest nieujemny i samosprzężony na $L^2(X)$

[2]niektórzy autorzy używają terminu *symetrczyna półgrupa Markowa*

II) Półgrupa $\exp(-tL)$ rozszerza się do ograniczonego operatora na wszystkich $L^p(X)$, który spełnia
$$\|\exp(-tL)f\|_{L^p(X)} \leqslant \|f\|_{L^p(X)}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$
III) $\exp(-tL)f \geqslant 0$ dla $f \geqslant 0$.
IV) $\exp(-tL)1 = 1$.

Twierdzenie 4.8 (Corollary 3, p. 121 [110]). *Niech L będzie generatorem symetrycznej półgrupy dyfuzji. Dla ograniczonej funkcji mierzalnej κ na $(0,\infty)$ zdefiniujmy mnożnik typu Laplace'a*

$$m(\lambda) = \lambda \int_0^\infty \kappa(t) e^{-\lambda t}\, dt. \tag{4.9}$$

Wówczas operator $m(L)$ jest ograniczony na $L^p(X)$, dla $1 < p < \infty$.

Powyższe twierdzenie zostało uogólnione przez Coifmana, Rochberga i Weissa, vide [27]. Ich podejście opiera się na tzw. metodzie transferencji i pozwala pominąć założenia III) i IV) w Twierdzeniu 4.8. Półgrupę, która spełnia tylko I) i II) (dla $f \in L^2(X) \cap L^p(X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$) będziemy nazywać *symetryczną półgrupą kontrakcji*.

Poniżej, dla kąta $0 < \psi < \pi/2$ definiujemy

$$S_\psi = \{z \in \mathbb{C} \colon |\arg z| < \psi\}. \tag{4.10}$$

Przez $H^\infty(S_\psi)$ oznaczamy przestrzeń funkcji holomorficznych w S_ψ z normą supremum. Zauważmy, że mnożniki typu Laplace'a jak w Twierdzeniu 4.8 są funkcjami holomorficznymi w prawej półpłaszczyźnie $S_{\pi/2}$, które śa jednostajnie ograniczone w każdym pod-sektorze S_φ sektora $S_{\pi/2}$. Kolejnego istotnego postępu dokonał Cowling w [29].

Twierdzenie 4.11 (Theorem 3 [29]). *Niech L będzie generatorem symetrycznej półgrupy kontrakcji. Ustalmy $1 < p < \infty$ i niech $\psi > |1/p - 1/2|$. Wówczas zachodzi*
$$\|m(L)\|_{L^p(X)\to L^p(X)} \leqslant C_\psi \|m\|_{H^\infty(S_\psi)}.$$
Innymi słowy: L ma $H^\infty(S_\psi)$ rachunki funkcyjne na $L^p(X)$.

W świetle powyższego twierdzenia rodzi się pytanie, czy $|1/p - 1/2|$ jest najmniejszym możliwym kątem. Niedawno Carbonaro i Dragičević pokazali, że $|1/p - 1/2|$ może być zmniejszony; dokładniej udało im się znaleźć optymalny kąt.

Twierdzenie 4.12 (Theorem 3 [21]). *Niech L będzie generatorem symetrycznej półgrupy kontrakcji. Ustalmy $1 < p < \infty$ i niech $\psi > \arcsin|2/p - 1|$. Wówczas L ma $H^\infty(S_\psi)$ rachunki funkcyjne na $L^p(X)$. Kąt $\arcsin|2/p - 1|$ jest optymalny. Mianowicie, istnieje operator L, który generuje symetryczną półgrupę kontrakcji, ale który nie posiada $H^\infty(S_\varphi)$ rachunków funkcyjnych dla $\varphi < \arcsin|2/p - 1|$.*

Odrębną linię badań, która jest rozwijana przez ostatnie dziesięciolecia, stanowią poszukiwania ostrych rachunków funkcyjnych dla konkretnych operatorów. Rozważmy dla przykładu L będący minus laplasjanem na $X = \mathbb{R}^d$. Niech H_2^s będzie L^2 przestrzenią Sobolewa
$$W_2^s = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \colon J_s f \in L^2(\mathbb{R}^d)\},$$
gdzie $\mathcal{F}(J_s f)(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(f)(\xi)$; zaś $\mathcal{F}$ oznacza transformatę Fouriera na $\mathbb{R}^d$. Przestrzeń tę wyposażamy w normę
$$\|f\|_{W_2^s} = \|J_s f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$
Niech η będzie funkcją gładką o nośniku zwartym, która jest równa 1 na odcinku $[1/2, 2]$ i zeruje się poza odcinkiem $[1/4, 4]$. Ostra (optymalna) wersja klasycznego twierdzenia mnożnikowego Mihlina-Hörmandera orzeka, że, dla $s > d/2$, i $1 < p < \infty$ zachodzi

$$\|m(L)\|_{L^p(X)\to L^p(X)} \leqslant C(p, d, \eta, s) \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left\|\eta(\cdot) m(2^k \cdot)\right\|_{W_2^s}. \tag{4.13}$$

Nietrudno sprawdzić, że
$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \left\|\eta(\cdot) m(2^k \cdot)\right\|_{W_2^s} \leqslant C_\eta \|m\|_{MH(N)}, \qquad N \geqslant s,$$
zatem (4.13) mówi więcej niż stwierdzenie, że L ma rachunki funcyjne Mihlina-Hörmandera.

Oszacowania podobne do (4.13) dla operatorów L ogólniejszych niż laplasjan na $\mathbb{R}^d$ zostały udowodnione w wielu kontekstach. Jednym z najbardziej istotnych jest przypadek gdy G jest spójną grupą Liego, zaś L jest pod-laplasjanem na G.

Jeden z pierwszych wyników w tej tematyce pochodzi z [66]. Hulanicki dowodzi tam, że jeśli grupa G ma wzrost wielomianowy, to różniczkowalność m (skończonego rzędu) implikuje ograniczoność operatora $m(L)$ na $L^1(G)$. Później Alexopoulos [4] pokazał, że pod-laplasjan L na spójnej grupie Liego o wzroście wielomianowym ma rachunki funkcyjne Mihlina-Hörmandera na wszystkich $L^p(G)$, $1 < p < \infty$, rzędu $s > \max(Q_0, Q_\infty)/2$. Tutaj przez Q_0 oznaczamy wymiar lokalny G (związany z odległością Carnot-Carathéodory'ego dla pod-laplasjanu L) zaś przez Q_∞ oznaczamy wymiar w nieskończoności (stopień wielomianowego wzrostu G).

Badania w przypadku gdy G jest warstwową grupą Liego, zaś L jest laplasjanem jednorodnym na G zostały zapoczątkowane przez Hulanickiego i Steina, vide Theorem 6.25 w książce [46]. Autorzy dowodzą tam, że dla $N > 3Q/2 + 3$, operator L ma rachunki funkcyjne Mihlina-Hörmandera rzędu N na wszystkich $L^p(G)$, $1 < p < \infty$. Symbol Q oznacza tutaj wymiar jednorodny grupy G. Następnie Christ [22] i Mauceri i Meda [85] pokazali, że można obniżyć próg gładkości w twierdzeniu Hulanickiego-Stein'a do $N > Q/2$. Inny dowód tego wyniku, korzystający ze skończonej propagacji równania fali, został później podany przez Sikorę [102]. Twierdzenie Christa-Mauceri'ego-Medy nie jest w ogólności ostre, zaś pytanie o obniżenie wykładnika $Q/2$ w tym kontekście pozostaje otwarte. Najniższym możliwym wykładnikiem jest połowa wymiaru topologicznego $\dim G/2$ (zauważmy, że $\dim G \leqslant Q$). W szczególnych przypadkach zostało dowiedzione, że próg ostro mniejszy niż $Q/2$ wystarczy, vide [33], [59], [60], [80], [81], [82], [83], [84], [98]. W niektórych z tych prac autorom udało się nawet osiągnąć najniższy możliwy próg $\dim G/2$.

Poza grupami Liego rachunki funkcyjne typu Mihlina-Hörmandera były także rozwijane na przestrzeniach typu jednorodnego. Mówimy, że przestrzeń metryczno-mierzalna $X = (X, \nu, \Sigma, \rho)$ (tutaj ρ jest metryką na X) jest przestrzenią typu jednorodnego, jeśli $\nu(B(x, 2r)) \leqslant C(X)\nu(B(x, r))$, dla wszystkich $x \in X$ i $r > 0$. Symbol $B(x, r)$ oznacza tu kulę względem metryki ρ. Rachunki funkcyjne typu Mihlina-Hörmandera na L^p zostały m.in. otrzymane dla operatorów badanych w [5], [23], [40], [41], [61], [88].

Przechodzimy teraz do szczegółowego opisu wyników wchodzących w skład osiągnięcia naukowego. W każdej z Sekcji 4.3.3-4.3.7, odpowiadających artykułom **H1**-**H5**, będziemy stosować notację z opisywanego artykułu. Mamy nadzieję ułatwić w ten sposób czytelnikowi porównanie opisu z samym artykułem.

4.3.3. **'On the consequences of a Mihlin-Hörmander functional calculus: maximal and square function estimates', artykuł H1**. Celem pierwszego artykułu wchodzącego w skład osiągnięcia naukowego było wywnioskowanie ograniczoności na L^p funkcji kwadratowej i maksymalnej związanej z operatorem L z założenia, że L ma rachunki funkcyjne Mihlina-Hörmandera. Udowodniono, że wiele operatorów rzeczywiście posiada takie rachunki funkcyjne, vide np. [4], [5], [22], [23], [33], [40], [41], [59], [60], [80], [61], [80], [81], [82], [83], [84], [98]. Z tego powodu **H1** stosuje się do wielu przypadków a w części z nich daje nowe wyniki.

Wyniki z **H1** znajdują także zastosowanie w **H2** i dodatkowo pozwalają nam rozwinąć pewne aspekty **H3**. Zwrócimy uwagę na te zastosowania **H1** podczas omawiania **H2** i **H3**.

Rozważmy laplasjan $-\Delta$ na $\mathbb{R}^d$. Niech $m\colon [0, \infty) \to \mathbb{C}$ będzie funkcją o nośniku zwartym, której pochodne do rzędu $[d/2] + 1$ są ciągłe. Twierdzenie mnożnikowe Mihlina-Hörmandera [65], [91] implikuje ograniczoność mnożników fourierowskich $m(-\Delta)$ na wszystkich przestrzeniach L^p, $1 < p < \infty$. Przypomnijmy, że $m(-\Delta)$ może być zdefiniowany za pomocą transformaty Fouriera $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^d} f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\xi} f(x)\, dx$ jako

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}^d}(m(-\Delta)f)(\xi) = m(|\xi|^2)\, \mathcal{F}_{\mathbb{R}^d}(f)(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Wiadomo także, że zarówno funkcja maksymalna $M_m(f) := \sup_{t>0} |m(-t\Delta)(f)|$ jak i kwadratowa $S_m(f)^2 = \int_0^\infty |m(-t\Delta)f|^2 \frac{dt}{t}$ (przy dodatkowym założeniu $m(0) = 0$) są ograniczone na wszystkich L^p, $1 < p < \infty$.

Ograniczoność M_m na przestrzeniach L^p dla $1 < p < \infty$, jest konsekwencją majoryzacji tego operatora przez funkcję maksymalną Hardy'ego-Littlewooda. Natomiast ograniczoność na wszystkich L^p

funkcji kwadratowej S_m może być otrzymana przy pomocy wektorowo wartościowej teorii Caldeóna-Zygmunda. Zwróćmy uwagę, że wszystkie dowody, o których mowa w niniejszym akapicie, w decydujący sposób wykorzystują strukturę dylatacyjną na $\mathbb{R}^d$ lub transformatę Fouriera.

W **H1** rozważaliśmy nieujemny samosprzężony operator L na $L^2 = L^2(X, \nu, \Sigma)$, gdzie $X = (X, \nu, \Sigma)$ jest σ skończoną przestrzenią miarową. Zakładaliśmy, że L generuje symetryczną półgrupę kontrakcji oraz, że L posiada rachunki funkcyjne typu Mihlina-Hörmandera pewnego rzędu $\alpha > 0$ na $L^p = L^p(X)$. Jak już wspomnieliśmy jest wiele prac które implikują posiadanie przez operator L rachunków funkcyjnych typu Mihlina-Hörmandera. Z drugiej strony oszacowania norm L^p dla ogólnych operatorów maksymalnych $M_m(f) := \sup_{t>0} |m(tL)(f)|$ i funkcji kwadratowych $S_m(f)^2 = \int_0^\infty |m(tL)f|^2 \frac{dt}{t}$ nie były przedmiotem tak intensywnych badań. Głównym celem **H1** było udowodnienie, że te oszacowania, w dużym stopniu, mogą być wywnioskowane z faktu posiadania przez L rachunków funkcyjnych Mihlina-Hörmandera.

Aby przedstawić wyniki z **H1** potrzebujemy wprowadzić kilka oznaczeń.

Symbol $C^\beta(Y)$ oznacza przestrzeń funkcji ciągłych na Y, które posiadają ciągłe pochodne do rzędu β. Dla $h \in C^\beta(Y)$ definiujemy

$$\|h\|_{C^\beta(Y)} = \sup_{\gamma \leqslant \beta} \sup_{y \in Y} \left| \frac{d^\gamma}{dy^\gamma} h(y) \right|;$$

zauważmy, że może się zdarzyć, że $\|h\|_{C^\beta(Y)} = \infty$. W **H1** za przestrzeń Y bierzemy zawsze $\mathbb{R}$, $[0, \infty)$ lub $[0, 1]$; w ostatnich dwóch przypadkach rozważamy jednostronne pochodne na brzegu.

Dla nieujemnej liczby β i $\eta \in C^\beta([0, \infty))$ definiujemy

$$C(\eta, \beta) := \int_1^\infty \left| \frac{d^\beta}{ds^\beta} \eta(s) \right| s^{\beta-1}\, ds \qquad D(\eta, \beta) := \int_1^\infty (\log s)^2 \left| \frac{d^\beta}{ds^\beta} \eta(s) \right| s^{\beta-1}\, ds,$$

o ile tylko całka jest zbieżna. W Twierdzeniach 4.16 i 4.22 poniżej potrzebujemy następujących wielkości

$$\begin{aligned} N(\eta) &:= \|\eta\|_{C^{\alpha+2}([0,1])} + \sup_{\beta=0,1,\alpha+2} C(\eta, \beta), \\ \tilde{N}(\eta) &:= N(\eta) + D(\eta, \alpha + 2). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Zauważmy, że skończoność $N(\eta)$ implikuje ograniczoność funkcji η. Wynika to z nierówności $|\eta(s)| \leqslant C(\eta, 1) + |\eta(1)|$, prawdziwej dla $s \geqslant 1$.

Funkcje maksymalne badane w **H1** były postaci

$$M_\varphi(f) = \sup_{t>0} |\varphi(tL)f|. \tag{4.15}$$

W szczególności, dla $\varphi(\lambda) = \exp(-\lambda)$ otrzymujemy funkcję maksymalną związaną z półgrupą ciepła $M_{\exp(-\cdot)}$.

Przed naszą pracą Alexopoulos i Lohué w [6] oraz Gunawan i Sikora w [55] otrzymali pewne wyniki dla funkcji maksymalnych związanych z mnożnikami spektralnymi. W artykule [6] autorzy skupili się na konkretnych funkcjach maksymalnych związanych z operatorami Bochnera-Riesza (na ogólnych grupach o wzroście wielomianowym oraz na rozmaitościach Riemanna o nieujemnej krzywiźnie). W raporcie [55] zbadano funkcje maksymalne związane z mnożnikami spektralnymi dla ogólnych operatorów eliptycznych na $\mathbb{R}^d$. Naszym wkładem w **H1** jest obserwacja, że podobne metody działają w znacznie bardziej ogólnym kontekście.

Głównym wynikiem z **H1** dla funkcji maksymalnych jest twierdzenie poniżej.

Twierdzenie 4.16 (Theorem 3.1 in **H1**)**.** *Załóżmy, ze L ma rachunki funkcyjne Mihlina-Hörmandera rzędu α na wszystkich przestrzeniach L^p, $1 < p < \infty$. Niech $\varphi \colon [0, \infty) \to \mathbb{C}$ będzie funkcją z $C^{\alpha+2}([0, \infty))$ która spełnia $N(\varphi) < \infty$. Wówczas operator maksymalny zadany przez (4.15) jest ograniczony na wszystkich przestrzeniach L^p, $1 < p < \infty$. Zachodzi również*

$$\|M_\varphi(f)\|_{L^p} \lesssim_p N(\varphi) \|f\|_{L^p}, \qquad f \in L^2 \cap L^p. \tag{4.17}$$

Jako bezpośredni wniosek z Twierdzenia 4.16 otrzymaliśmy w **H1** następujące oszacowanie, które było później istotnie wykorzystane w **H2**.

Wniosek 4.18 (Corollary 3.2 in **H1**)**.** *Załóżmy, że φ ma nośnik w pewnym zbiorze zwartym K. Wówczas, dla wszystkich $1 < p < \infty$ zachodzi*

$$\|M_\varphi(f)\|_{L^p} \lesssim_{K,p} \|\varphi\|_{C^{\alpha+2}([0,\infty))} \|f\|_{L^p}, \qquad f \in L^2 \cap L^p. \tag{4.19}$$

Dowód Twierdzenia 4.16 jest zawarty w **H1** na str. 148. Opiera się on na technikach transformaty Mellina. W analizie harmonicznej metoda transformaty Mellina została zapoczątkowana w pracy Cowlinga [29, Section 3]. Formalnie rzecz biorąc pomysł opiera się na zapisaniu dla $m(\lambda) = \varphi(\lambda) - e^{-t\lambda}$ mnożnika $m(tL)$ za pomocą odwrotnej transformaty Mellina (transformaty Fouriera na grupie $((0, \infty), \cdot)$) jako

$$m(tL) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(m)(u) t^{iu} L^{iu} f \, du, \tag{4.20}$$

gdzie $\mathcal{M}(m)(u) = \int_0^\infty m(s) s^{-iu-1} \, ds$. Pozwala to na oszacowanie z góry operatora maksymalnego za pomocą całki z urojonych potęg L^{iu} plus funkcji maksymalnej dla półgrupy ciepła (której ograniczoność na L^p jest znana). Pomysł ten pochodzi z pracy Cowlinga [29, Section 3]. W tym miejscu potrzebujemy także oszacowania $\|L^{iu}\|_{L^p} \leqslant C_p(1 + |u|)^\alpha$, które wynika z założenia, że L posiada rachunki funkcyjne Mihlina-Hörmandera rzędu α. Zauważmy, że aby napisać (4.20) oraz dowód z **H1** p. 148 formalnie, jedyną rzeczą pozostałą do sprawdzenia jest mocna ciągłość na L^p (dla $1 < p < \infty$) grupy urojonych potęg $\{L^{iu}\}_{u \in \mathbb{R}}$. W przypadku gdy mocna ciągłość zachodzi dowód przepisuje się na ogólne przestrzeni Banacha, niekoniecznie będące przestrzeniami L^p. Ta obserwacja będzie istotna w **H3**.

Funkcje kwadratowe badane w **H1** były postaci

$$S_\psi(f) = \left(\int_0^\infty |\psi(tL) f|^2 \, \frac{dt}{t} \right)^{1/2}. \tag{4.21}$$

Z twierdzenia spektralnego wiadomo, że S_ψ jest ograniczona na L^2 wtedy i tylko wtedy gdy

$$\int_0^\infty |\psi(t)|^2 \, \frac{dt}{t} < \infty.$$

W artykule [30] autorstwa Cowlinga, Dousta, McIntosha, i Yagi'ego w wyczerpujący sposób rozważono przypadek gdy ψ jest funkcją holomorficzną. Praca **H2** pozwala osłabić to założenie do pewnej skończonej gładkości funkcji ψ, pod warunkiem, że L ma rachunki funkcyjne typu Mihlina-Hörmandera.

Twierdzenie 4.22. *Załóżmy, że L ma rachunki funkcyjne Mihlina-Hörmandera rzędu α na wszystkich przestrzeniach L^p, $1 < p < \infty$. Niech $\psi \in C^{\alpha+2}[0, \infty)$ spełnia $\psi(0) = 0$ i $\tilde{N}(\psi) < \infty$. Wówczas, dla każdego $1 < p < \infty$, funkcja kwadratowa (4.21) spełnia*

$$\|f\|_{L^p} \lesssim_{p,\psi} \|S_\psi(f)\|_{L^p} \lesssim_{p,\psi} \|f\|_{L^p}, \qquad f \in L^2 \cap L^p. \tag{4.23}$$

Z Twierdzenia 4.22 łatwo otrzymujemy poniższy wniosek.

Wniosek 4.24. *Niech $\psi \in C^{\alpha+2}[0, \infty)$ spełnia $\psi(0) = 0$ i załóżmy, że nośnik ψ zawiera się w zbiorze zwartym K. Wówczas dla każdego $1 < p < \infty$ zachodzi*

$$\|f\|_{L^p} \lesssim_{p,\psi,K} \|S_\psi(f)\|_{L^p} \lesssim_{p,\psi,K} \|f\|_{L^p}, \qquad f \in L^2 \cap L^p. \tag{4.25}$$

Dowód Twierdzenia 4.22 jest oparty na wykorzystaniu transformaty Mellina oraz pewnych idei z [30]. Korzystając z faktu, że transformata Mellina jest izometrią między $L^2((0, \infty), \frac{dt}{t})$ i $L^2(\mathbb{R})$ zapisujemy

$$S_\psi(f) = \left(\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{M}(\psi)(u) L^{iu} f|^2 \, du \right)^{1/2}. \tag{4.26}$$

Następnie należy odpowiednio rozłożyć całkę (4.26) na dyskretne funkcje kwadratowe, które z kolei szacują się przy użyciu nierówności Chinczyna. Warto podkreślić, że dowód Twierdzenia 4.22 jest wyraźnie bardziej skomplikowany od dowodu Twierdzenia 4.16.

Na zakończenie opisu **H1** chcielibyśmy jeszcze raz podkreślić fakt, że funkcje φ i ψ z Twierdzeń 4.16 i 4.22 nie muszące być holomorficzne. Warianty tych twierdzeń przy dodatkowym założeniu holomorficzności φ i ψ w odpowiednim sektorze, były znane wcześniej, vide [29], [21] i [30]. W tych pracach autorzy musieli pracować z funkcjami holomorficznymi, ponieważ operator L miał tylko H^∞ rachunki funkcyjne.

4.3.4. **'Approaching bilinear multipliers via a functional calculus', artykuł H2**. W drugiej pracy wchodzącej w skład rozprawy habilitacyjnej zaproponowaliśmy pewną teorię ograniczoności operatorów dwuliniowych zadanych przez twierdzenie spektralne. W jej ramach udowodniliśmy twierdzenia typu Coifmana-Meyera oraz ułamkowe reguły Leibniza. W **H2** opisaliśmy też zastosowania naszej teorii; do mnożników dwuliniowych związanych z dyskretnym laplasjanem na $\mathbb{Z}^d$, ogólnych dwuliniowych radialnych mnożników Dunkla, oraz do mnożników dwuliniowych związanych z rozwinięciami Jacobi'ego. O ile nam wiadomo jest to pierwszy przykład tak ogólnej teorii dla mnożników dwuliniowych. Przejdźmy teraz do szczegółów.

Mnożnikami dwuliniowymi dla transformaty Fouriera nazywane są operatory

$$F_m(f_1,f_2)(x) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\mathbb{R}^2} m(\xi_1,\xi_2)\hat{f}_1(\xi_1)\hat{f}_2(\xi_2)e^{ix(\xi_1+\xi_2)}\,d\xi, \qquad x\in\mathbb{R}, \tag{4.27}$$

gdzie $m\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ jest funkcją ograniczoną. Symbol $\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,dx$ oznacza tu transformatę Fouriera na $\mathbb{R}$. Według naszej wiedzy przed **H2** nie została podjęta próba uogólnienia operatorów F_m poza kontekst fourierowski. Główną ideą przyświecającą **H2** była próba stworzenia teorii mnożników dwuliniowych zdefiniowanych przez (dwuwymiarowe) twierdzenie spektralne, która naśladuje związek między liniowymi mnożnikami Fouriera i liniowymi mnożnikami spektralnymi.

Punktem początkowym naszych badań była obserwacja, że wzór (4.27) może być zapisany inaczej jako

$$F_m(f_1,f_2)(x) = m(i\partial_1,i\partial_2)(f_1\otimes f_2)(x,x), \qquad x\in\mathbb{R};$$

symbole ∂_1, ∂_2 oznaczają tu pochodne cząstkowe, zaś $m(i\partial_1,i\partial_2)$ jest zdefiniowany przez dwuwymiarowe twierdzenie spektralne za pomocą (4.6). Zauważmy, że $\partial_1=\partial\otimes I$ i $\partial_2=I\otimes\partial$, gdzie ∂ oznacza pochodną na $\mathbb{R}$, zaś I jest operatorem identycznościowym. W **H2** badamy możliwość zastąpienia $i\partial_1$ i $i\partial_2$ przez bardziej ogólne operatory postaci $L_1=L\otimes I$ i $L_2=I\otimes L$. Rozważane przez nas mnożniki dwuliniowe to

$$B_m(f_1,f_2)(x) = m(L_1,L_2)(f_1\otimes f_2)(x,x), \qquad x\in X. \tag{4.28}$$

Powyżej L jest nieujemnym samosprzężonym operatorem na $L^2(X)$, gdzie $X=(X,\nu,\Sigma)$ jest σ skończoną przestrzenią miarową, zaś $m(L_1,L_2)$ jest zdefiniowane przez dwuwymiarowe twierdzenie spektralne, vide (4.6). Zakładamy, ze L generuje symetryczną półgrupę kontrakcji oraz, że (4.28) ma sens (formalnie jest to warunek (WD) w **H2**). Te dwa założenia są natury techniczej. Głównymi założeniami o L w **H2** są posiadanie przez L rachunków funkcyjnych Mihlina-Hörmandera rzedu $\rho>0$, a także pewien wzór na punktowy iloczyn mnożników spektralnych L. Mianowicie w **H2** wymagamy, że

(MH) L posiada rachunki funkcyjne typu Mihlina-Hörmandera rzędu ρ na wszystkich przestrzeniach $L^p=L^p(X)$, $1<p<\infty$,

oraz, że

istnieje stała $b>0$ o następującej własności: jeśli φ i ψ są ograniczonymi funkcjami gładkimi spełniającymi $\mathrm{supp}\varphi_k\subseteq[0,2^{k-b}]$ i $\mathrm{supp}\psi_k\subseteq[2^{k-2},2^{k+2}]$, $k\in\mathbb{Z}$, to wówczas

$$\varphi_k(L)(f_1)\cdot\psi_k(L)(f_2) = \tilde{\psi}_k(L)[\varphi_k(L)(f_1)\cdot\psi_k(L)(f_2)], \tag{PF}$$

dla dowolnej funkcji gładkiej $\tilde{\psi}_k$, która równa się 1 na $[2^{k-3-b},2^{k+3+b}]$ i znika poza $[2^{k-5-b},2^{k+5+b}]$.

Z grubsza mówiąc (PF) orzeka, że mnożniki spektralne L zachowują się odpowiednio dobrze względem punktowego mnożenia funkcji.

Powstaniu **H2** przyświecały dwa główne cele. Po pierwsze chcieliśmy udowodnić twierdzenia Coifmana-Meyera poza kontekstem fourierowskim. Po drugie szukaliśmy zastosowań tych wyników do ułamkowych reguł Leibniza.

Klasyczne twierdzenie mnożnikowe Coifmana-Meyera orzeka, że dwuwymiarowy warunek Mihlina-Hörmandera $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^2}|\xi|^{\alpha_1+\alpha_2}|\partial^\alpha m(\xi)|\leqslant C_\alpha$, $\alpha\in\mathbb{N}^2$, implikuje ograniczoność operatora F_m z $L^{p_1}\times L^{p_2}$ do L^p, $1/p=1/p_1+1/p_2$, $p_1>1$, $p_2>1$, $p>1/2$. Twierdzenie to zostało otrzymane przez Coifmana i Meyera dla $p>1$, vide [25]. Wynik został następnie uogólniony do $p>1/2$ przez Grafakosa i Torresa [53] oraz Keniga i Steina [74].

Głównym wynikiem **H2** jest uogólnione twierdzenie Coifmana-Meyera. Poniżej piszemy skrótowo $L^p=L^p(X)$.

Twierdzenie 4.29 (Theorem 2.3 in **H2**). *Załóżmy, że $m\colon(0,\infty)^2\to\mathbb{C}$ spełnia dwuwymiarowy warunek Mihlina-Hörmandera*

$$|\lambda|^{\alpha_1+\alpha_2}|\partial^\alpha m(\lambda)|\leqslant C_\alpha, \qquad \lambda\in(0,\infty)^2, \tag{4.30}$$

dla wszystkich multi-indeksów $\alpha\in\mathbb{N}^2$, $\alpha_1+\alpha_2\leqslant 2\rho+4$. Wówczas operator B_m zadany przez (4.28) jest ograniczony z $L^{p_1}\times L^{p_2}$ do L^p, gdzie $1/p_1+1/p_2=1/p$ i $p_1,p_2,p>1$. Dokładniej, dla $f_i\in L^{p_i}$,

$i = 1, 2$, *zachodzi*

$$\|B_m(f_1, f_2)\|_{L^p} \leqslant C_{p,m} \|f_1\|_{L^{p_1}} \|f_2\|_{L^{p_2}}.$$

Dowód Twierdzenia 4.29 jest zaprezentowany w [Section 2, **H2**]. Główną napotkaną trudnością było znalezienie odpowiednio 'elastycznego' dowodu klasycznego twierdzenia Coifmana-Meyera. Dowód, który prezentujemy w **H2** naśladuje schemat z książki Muscalu i Schlaga [94, pp. 67-71]. Jest też dość bliski oryginalnemu dowodowi Coifmana i Meyera [25]. W dowodzie Twierdzenia 4.29 rozkładamy $m(L_1, L_2)$ po stronie spektralnej na dwie części składowe zależnie od tego czy zmienne spektralne λ_1 i λ_2 są blisko czy daleko od siebie. Założenie (MH) jest użyte w obu częściach. Dokładniej w obu składowych potrzebujemy ograniczoności na L^p funkcji maksymalnej M_φ danej przez (4.15) dla funkcji $\varphi \in C^{\alpha+2}([0, \infty])$ o nośniku zwartym. Ta ograniczoność została wcześniej uzasadniona w **H1**, w autoreferacie jest ona sformułowana jako Wniosek 4.18. W dowodzie potrzebujemy również spektralnego wariantu teorii Littlewooda-Paley'a na L^p, który w standardowy sposób wynika z (MH). Założenie (PF) natomiast jest bardzo przydatne w składowej $m(L_1, L_2)$ w której zmienna spektralne są daleko od siebie.

Twierdzenie 4.29 pozwala otrzymać jako wnioski twierdzenia mnożnikowe typu Coifmana-Meyera w trzech przypadkach poza kontekstem transformaty Fouriera. W [Theorem 3.1, **H2**] otrzymujemy twierdzenie typu Coifmana-Meyera dla L będącego dyskretnym laplasjanem na $\mathbb{Z}^d$. Rezultat ten jest bliski [11, Theorem 3.4]. W [Theorem 4.1, **H2**] badamy dwuliniowe bi-radialne mnożniki dla operatorów Dunkla; tutaj za L bierzemy ogólny laplasjan Dunkla. Dodatkowo [Corollary 4.3, **H2**] dostarcza innego dowodu [7, Theorem 4.1].. Wreszcie w [Theorem 5.1, **H2**] otrzymujemy twierdzenie mnożnikowe typu Coifmana-Meyera dla rozwinięć w wielomiany Jacobi'ego; tutaj L jest operatorem Jacobi'ego.

Drugim z głównym celów **H2** było otrzymanie ułamkowych reguł Leibniza dla operatorów różnych od klasycznego laplasjanu. Ułamkowa reguła Leibniza dla laplasjanu $\Delta_{\mathbb{R}^d}$ na $\mathbb{R}^d$ orzeka, że dla każdego $s \geqslant 0$ i $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$, $p_1, p_2 > 1$, $p > 1/2$, zachodzi

$$\|(-\Delta_{\mathbb{R}^d})^s(fg)\|_{L^p} \lesssim \|(-\Delta_{\mathbb{R}^d})^s(f)\|_{L^{p_1}} \|g\|_{L^{p_2}} + \|(-\Delta_{\mathbb{R}^d})^s(g)\|_{L^{p_2}} \|f\|_{L^{p_1}}.$$

Dowód tej nierówności można znaleźć w pracy Grafakosa and Oh [54], przypadek krańcowy jest zawarty w artykule Bourgaina i Li [16]. Podobna nierówność była badana przez Kato i Ponce [72] dlatego ułamkowa reguła Leibniza znana jest również jako nierówność Kato-Ponce'a (vide [73]). Uogólnienia nierówności Kato-Ponce'a lub podobnych nierówności były badane przez wielu autorów. Dla przykładu, Muscalu, Pipher, Tao, i Thiele [93] rozszerzyli nierówność przez dopuszczenie ułamkowych pochodnych cząstkowych na $\mathbb{R}^2$; Bernicot, Maldonado, Moen, i Naibo [17] udowodnili nierówność Kato-Ponce'a w kontekście wagowych przestrzeni L^p; natomiast Frey [51] otrzymała ułamkową regułę Leibniza dla ogólnych operatorów spełniających oszacowania Davies'a-Gaffney'a w przypadku gdy $p_1 = p = 2$, $p_2 = \infty$.

W artykule **H2** pokazujemy ułamkowe reguły Leibniza postaci

$$\|L^s(fg)\|_{L^p} \lesssim_s \|L^s(f)\|_{L^{p_1}} \|g\|_{L^{p_2}} + \|L^s(g)\|_{L^{p_2}} \|f\|_{L^{p_1}},$$

gdzie $s > 0$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1/p$, $p_1, p_2, p > 1$, w dwóch nowych kontekstach: gdy L jest dyskretnym laplasjanem na $\mathbb{Z}^d$ [Corollary 3.2, **H2**] oraz gdy L laplasjanem Dunkla w sytuacji produktowej [Corollary 4.3, **H2**]. Dowody tych ułamkowych reguł Leibniza opierają się na dwóch własnościach operatora L. Po pierwsze, potrzebujemy odpowiedniego twierdzenia mnożnikowego typu Coifmana-Meyera; twierdzenie takie wynika z Twierdzenia 4.29. Po drugie, wymagamy istnienia pewnych operatorów związanych z L, które spełniają (bądź prawie spełniają) regułę Leibniza całkowitego rzędu.

4.3.5. **'Strong continuity on Hardy spaces', artykuł H3**. .

W trzeciej pracy wchodzącej w skład osiągnięcia naukowego badaliśmy mocną ciągłość na przestrzeni Hardy'ego H^1_L różnych mnożników spektralnych postaci $m(tL)$. Symbol L oznacza tu operator na L^2, który ma oszacowania Daviesa-Gaffneya (patrz (DG)) zaś H^1_L to abstrakcyjna przestrzeń Hardy'ego dla L zdefiniowana w monografii [64]. Opiszemy teraz nasze wyniki bardziej szczegółowo.

W teorii półgrup operatorów liniowych na przestrzeniach Banacha kluczowe jest założenie mocnej ciągłości. Często zdarza się, że półgrupa $T_t = e^{-tL}$ jest początkowo zdefiniowana na $L^2(\Omega)$, zaś L jest nieujemnym samosprzężonym operatorem. W tym przypadku twierdzenie spektralne natychmiast implikuje mocną ciągłość na $L^2(\Omega)$, tzn. zachodzi $\lim_{t\to 0^+} \|T_t f\|_{L^2(\Omega)} = 0$, dla $f \in L^2(\Omega)$. Załóżmy także, że $\{T_t\}_{t>0}$ rozszerza się do symetrycznej półgrupy kontrakcji na wszystkich $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Korzystając z faktu, że mocna i słaba zbieżność to te same pojęcia dla półgrup operatorów (patrz np. [44, Twierdzenie 5.8]), łatwo zauważyć, że półgrupa T_t jest mocno ciągła na wszystkich $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$.

Ponadto, ponieważ $\{T_t\}_{t>0}$ jest kontrakcją na $L^1(\Omega)$, można pokazać, że $L^1(\Omega)$ jest też mocno ciągła na $L^1(\Omega)$. Często mamy do czynienia z sytuacją gdy półgrupa $\{T_t\}_{t>0}$ może być również zdefiniowana na przestrzeniach funkcyjnych innych niż L^p. Dla przykładu, klasyczną półgrupa ciepła $T_t = e^{t\Delta}$ na $\mathbb{R}^d$ działa również na atomowej przestrzeni Hardy'ego H^1_{at}. Mocna ciągłość $e^{t\Delta}$ na H^1_{at} nie jest jednak oczywista. Wyniki **H3** implikują między innymi tę mocną ciągłość.

W pracy **H3** zakładaliśmy, że przestrzeń Ω jest przestrzenią typu jednorodnego w sensie Coifmana-Weissa [28] oraz, że półgrupa $\{T_t\}_{t>0}$ spełnia tzw. oszacowania Daviesa-Gaffney'a.

Przypomnijmy, że $\Omega = (\Omega, \Sigma, \mu, d)$ (gdzie Σ jest σ-ciałem na Ω, μ jest miarą na Σ, zaś d jest metryką na Ω) jest przestrzenią typu jednorodnego w sensie Coifmana-Weissa gdy istnieje stała C taka, że

$$\mu(B_d(x,2t)) \leqslant C\mu(B_d(x,t)) \quad \text{dla wszystkich } x \in \Omega,\ t > 0, \tag{4.31}$$

tutaj $B_d(x,t) = \{y \in \Omega:\ d(x,y) < t\}$. Warunek (4.31) implikuje istnienie stałych $C_0 > 0$ i $q > 0$ takich, że

$$\mu(B_d(x,st)) \leqslant C_0 s^q \mu(B_d(x,t)) \quad \text{for every } x \in \Omega,\ t > 0,\ s > 1. \tag{4.32}$$

Oznaczmy przez n_0 infimum po q w (4.32).

Oszacowaniami Daviesa-Gaffney'a nazywamy nierówności

$$|\langle T_t f_1, f_2\rangle| \leqslant C \exp\left(-\frac{\operatorname{dist}(U_1,U_2)^2}{ct}\right) \|f_1\|_{L^2(\Omega)}\|f_2\|_{L^2(\Omega)} \tag{DG}$$

dla dowolnej $f_i \in L^2(\Omega)$, $\operatorname{supp} f_i \subset U_i$, $i = 1,2$, gdzie U_i są otwartymi podzbiorami Ω. Wiadomo, że punktowe oszacowania Gaussowskie implikują oszacowania Daviesa-Gaffney'a. Załóżmy mianowicie, że operator T_t może być wyrażony jądrem całkowym jako $T_t f(x) = \int_\Omega T_t(x,y) f(y)\, d\mu(y)$. Wówczas nierówność

$$|T_t(x,y)| \leqslant \frac{C_0}{V(x,\sqrt{t})} \exp\left(-\frac{d(x,y)^2}{c_0 t}\right), \tag{4.33}$$

dla pewnych nieujemnych stałych C_0, c_0, implikuje (DG). Z racji tego, że (4.33) zachodzi dla wielu operatorów, w szczególności dla operatórw Schrödingera z nieujemnym potencjałem, widzimy, że nasze założenia są dość ogólne.

Dla $f \in L^2(\Omega)$ rozważmy funkcję kwadratową $S_h f$ stowarzyszoną z L i zadaną wzorem

$$S_h f(x) = \left(\iint_{\Gamma(x)} |t^2 L T_{t^2} f(y)|^2 \frac{d\mu(y)}{V(x,t)} \frac{dt}{t}\right)^{1/2},$$

gdzie $\Gamma(x) = \{(y,t) \in \Omega \times (0,\infty):\ d(x,y) \leqslant t\}$. Przestrzeń Hardy'ego $H^1_L = H^1_{L,S_h}(\Omega)$ jest zdefiniowana jako (abstrakcyjne) uzupełnienie

$$\{f \in L^2(\Omega):\ \|S_h f\|_{L^1(\Omega)} < \infty\}$$

w normie $\|f\|_{H^1_L} = \|S_h f\|_{L^1(\Omega)}$. Hofmann, Lu, Mitrea, Mitrea, Yan pokazali w [64], że przy założeniu (DG) przestrzeń H^1_L może być opisana zarówno przez rozkłady atomowe jak i molekularne. Poniżej opiszemy pokrótce te rozkłady.

Niech $M \geqslant 1$, $M \in \mathbb{N}$. Funkcję a nazywamy $(1,2,M)$-atomem dla H^1_L gdy istnieje kula $B = B_d(y_0,r) = \{y \in \Omega:\ d(y,y_0) < r\}$ i funkcja $b \in \mathcal{D}(L^M)$ taka, że

$$a = L^M b;$$

$$\operatorname{supp} L^k b \subset B,\quad k = 0,1,\dots,M;$$

$$\|(r^2L)^k b\|_{L^2(\Omega)} \leqslant r^{2M}\mu(B)^{-1/2},\quad k = 0,1,\dots,M.$$

Mówimy, że $f = \sum_j \lambda_j a_j$ jest $(1,2,M)$ atomową reprezentacją (funkcji f) gdy $\{\lambda_j\}_{j=0}^\infty \in l^1$, każdy z a_j jest $(1,2,M)$ atomem, a suma jest zbieżna w L^2. Następnie definiujemy

$$\mathbb{H}^1_{L,at,M} = \Big\{f:\ f \text{ posiada } (1,2,M) \text{ atomową reprezentację}\Big\},$$

z normą zadaną przez

$$\|f\|_{\mathbb{H}^1_{L,at,M}} = \inf\left\{\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j| \colon f = \sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j a_j \text{ jest } (1,2,M) \text{ atomową reprezentacją}\right\}.$$

Przestrzeń $H^1_{L,at,M}$ jest zdefiniowana jako (abstrakcyjne) uzupełnienie $\mathbb{H}^1_{L,at,M}$.

Theorem 4.14 z [64] orzeka, że dla każdego $M > n_0/4$ istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$C^{-1}\|f\|_{H^1_L} \leqslant \|f\|_{H^1_{L,at,M}} \leqslant C\|f\|_{H^1_L}.$$

W pracy [64] autorzy podali także opis H^1_L za pomocą molekuł. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i $M > n_0/4$, $M \in \mathbb{N}$. Powiemy, że funkcja $\tilde{a}$ jest $(1,2,M,\varepsilon)$ molekułą związaną z L gdy istnieje funkcja $\tilde{b} \in \mathcal{D}(L^M)$ oraz kula $B = B_d(y_0, r)$ takie, że

$$\tilde{a} = L^M\tilde{b};$$
$$\|(r^2L)^k\tilde{b}\|_{L^2(U_jB))} \leqslant r^{2M}2^{-j\varepsilon}\mu(B(y_0,2^jr))^{-1/2}$$

dla $k = 0,1,...,M$, $j = 0,1,2,...$, gdzie $U_0 = B$, $U_j(B) = B_d(y_0,2^jr) \setminus B_d(y_0,2^{j-1}r)$ dla $j \geqslant 1$. Rozkład $f = \sum_j \lambda_j\tilde{a}_j$ jest $(1,2,M,\varepsilon)$ molekularną reprezentacją (funkcji f) gdy $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty} \in l^1$, każda z funkcji $\tilde{a}_j$ jest $(1,2,M,\varepsilon)$ molekułą, i suma zbiega w L^2. Definiujemy

$$\mathbb{H}^1_{L,mol,M,\varepsilon} = \left\{f \in L^2(\Omega) \colon f \text{ posiada } (1,2,M,\varepsilon) \text{ molekularną reprezentację}\right\},$$

z normą zadaną przez

$$\|f\|_{\mathbb{H}^1_{L,mol,M,\varepsilon}} = \inf\left\{\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda_j| \colon f = \sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j\tilde{a}_j \text{ jest } (1,2,M,\varepsilon) \text{ molekularną reprezentacją}\right\}.$$

Przestrzeń $H^1_{L,mol,M,\varepsilon}$ jest (abstrakcyjnym) uzupełnieniem $\mathbb{H}^1_{L,mol,M}$.

W [64, Corollary 5.3] udowodniono, że dla $M > n_0/4$ i $\varepsilon > 0$ zachodzi $\mathbb{H}^1_{L,at,M} = \mathbb{H}^1_{L,mol,M,\varepsilon}$, z równoważnością norm. Dodatkowo, mamy $H^1_L = H^1_{L,at,M}$ a zatem

$$H^1_L = H^1_{L,at,M} = H^1_{L,mol,N,\varepsilon}, \tag{4.34}$$

dla $N, M > n_0/4$.

Pod powyższymi założeniami udowodniliśmy w **H3** następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.35 (Theorem 3.1 in **H3**). *Niech κ będzie liczbą naturalną większą niż $(n_0+1)/2$. Niech $m\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ będzie funkcją ciągłą mającą ciągłe pochodne cząstkowe do rzędu κ na $(0,\infty)$. Załóżmy, że m spełnia warunek Mihlina-Hörmandera (4.3) rzędu κ i dodatkowo, że*

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\lambda^j m^{(j)}(\lambda) = 0, \qquad j = 1,\dots,\kappa. \tag{4.36}$$

Wówczas zachodzi następująca mocna zbieżność na H^1_L,

$$\lim_{t\to 0^+} m(t\sqrt{L})f = m(0)f, \qquad \textit{for every } f \in H^1_L. \tag{4.37}$$

Jako wniosek z naszego głównego twierdzenia otrzymaliśmy mocną ciągłość konkretnych rodzin operatorów.

Wniosek 4.38 (Corollary 3.2 in **H3**). *Zarówno półgrupa ciepła e^{-tL} jak i półgrupa Poissona $e^{-t\sqrt{L}}$ są mocno ciągłe na H^1_L.*

Wniosek 4.39 (Corollary 3.3 in **H3**). *Niech $f \in H^1_L$. Wówczas zachodzi zbieżność $\lim_{u\to 0} L^{iu}f = f$ w normie H^1_L.*

Główną ideą w dowodzie Twierdzenia 4.35 było pokazanie, że istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla każdego a będącego $(1,2,2M)$ atomem funkcja $(m(t\sqrt{L})-m(0))a$ jest małą wielokrotnością $(1,2,M,\varepsilon)$ molekuły gdy $t \to 0$. To wystarczy z uwagi na równoważność (4.34). Metody użyte w dowodzie Twierdzenia 4.35 są oparte na artykule [42], w którym Dziubański i Preisner otrzymali rachunki funkcyjne Mihlina-Hörmandera dla L na H^1_L, vide [42, Theorem 4.2] i [Theorem 2.2 in **H3**]. Ważnym narzędziem był także Lemma 4.8 z [42].

Lemat 4.40. [42, Lemma 4.8], **H1**, *Lemma 2.3] Niech $\gamma > 1/2$, $\beta > 0$. Wówczas istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdej funkcji $F \in W^{2,\gamma+\beta/2}(\mathbb{R})$ i każdej funkcji $g \in L^2(\Omega)$, $\operatorname{supp} g \subset B_d(y_0, r)$, zachodzi*

$$\int_{d(x,y_0)>2r} |F(2^{-j}\sqrt{L})g(x)|^2 \left(\frac{d(x,y_0)}{r}\right)^\beta d\mu(x) \leqslant C(r2^j)^{-\beta}\|F\|^2_{W^{2,\gamma+\beta/2}}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}$$

dla $j \in \mathbb{Z}$.

W dowodzie tego lematu kluczowym jest założenie (DG). Dokładniej, używana jest tam równoważność (DG) ze skończoną prędkością propagacji równania fali.

Zakończymy tę sekcję opisem jeszcze jednego wniosku z **H1** i **H3** który był zasugerowany w obu tych artykułach ale w żadnym nie został napisany bezpośrednio.

Wniosek 4.41. *Załóżmy, ze pólgrupa $\{T_t\}_{t>0}$ spełnia oszacownia Gaussowskie (4.33). Niech $\varphi \in C^{\kappa+2}([0,\infty))$, dla pewnej liczby naturalnej $\kappa > (n_0+1)/2$, i załóżmy, że φ jest niesiona w pewnym zbiorze zwartym K. Mamy wówczas*

$$\|M_\varphi(f)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant C_K\|\varphi\|_{C^{\kappa+2}([0,\infty))}\|f\|_{H^1_L}. \tag{4.42}$$

Dowód (szkic). Z [64, Theorem 7.4] wiemy, że

$$\|\sup_{t>0}|e^{-tL}f|\|_{L^1(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{H^1_L};$$

w szczególności $\|f\|_{L^1(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{H^1_L}$. Dodatkowo, Wniosek 4.39 implikuje, że odwzorowanie $u \mapsto L^{iu}$ jest mocno ciągłe na H^1_L; ponieważ $\|f\|_{L^1(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{H^1_L}$ wnioskujemy, że L^{iu} jest mocno ciągłe z H^1_L do $L^1(\Omega)$. Następnie z [42, Theorem 4.2] wiemy, że L ma rachunki funkcyjne Mihlina-Hörmandera na H^1_L rzędu κ, skąd otrzymujemy oszacowanie $\|L^{iu}\|_{H^1_L} \leqslant C(1+|u|)^\kappa$. Używając powyższych obserwacji i powtarzając dowód Twierdzenia 4.16 i Lematu 4.18 dochodzimy łatwo do (4.42). □

4.3.6. **'Dimension-free L^p estimates for vectors of Riesz transforms associated with orthogonal expansions', artykuł H4.** W czwartej pracy osiągnięcia naukowego zastosowaliśmy metodę funkcji Bellmana do badania norm L^p wektorów transformat Riesza związanych z rozwinięciami ortogonalnymi. Udowodniliśmy, że dla wielu rozwinięć ortogonalnych normy te są szacowane z góry przez $48\max(p,(p-1)^{-1})$. Kluczowy dla naszej metody jest pewien wzór typu rachunków funkcyjnych, który wiąże transformatę Riesza z pewną całką, w której występują dwa rodzaje półgrup. Warto zauważyć, że te półgrupy nie komutują. Wyniki **H4** można uważać za odpowiednik na L^p, $1 < p < \infty$, dla dużej części teorii L^2 z pracy Nowaka i Stempaka w [105]. Opiszemy teraz pracę **H4** bardziej szczegółowo.

Klasycznymi transformatami Riesza na $\mathbb{R}^d$ nazywamy operatory

$$R_i f(x) = \partial_{x_i}(-\Delta_{\mathbb{R}^d})^{-1/2}f(x), \qquad i = 1,\dots,d.$$

W [112] E. M. Stein udowodnił, że wektor transformat Riesza

$$\mathbf{R}f = (R_1 f,\dots,R_d f)$$

ma niezależne od wymiaru oszacowania na przestrzeniach L^p; dokładniej

$$\|\mathbf{R}f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_p\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \qquad 1 < p < \infty, \tag{4.43}$$

gdzie C_p jest niezależne od wymiaru d. W tej sekcji przez $\|\mathbf{R}f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ zawsze oznaczamy normę $L^p(\ell^2)$ wektora $\mathbf{R}f$, mianowicie $\|\big(\sum_{j=1}^d |R_j f|^2\big)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$. Jakiś czas później zdano sobie sprawę, że dla $1 < p < 2$ można przyjąć $C_p \leqslant C(p-1)^{-1}$ w (4.43), vide [9], [39]. Warto nadmienić, że najlepsza stała w oszacowaniu (4.43) jest nieznana dla $d \geqslant 2$; najlepsze znane wyniki można znaleźć w [10] i [67].

Głównym celem **H4** było uogólnienie (4.43) do kontekstów produktowych $X = X_1 \times \cdots \times X_d$ bardziej ogólnych niż $\mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ z produktową miarą Lebesgue'a. Punktem startowym naszych badań była obserwacja, że klasyczne transformaty Riesza mogą być formalnie zapisane jako $R_i = \delta_i(\sum_{i=1}^d L_i)^{-1/2}$ gdzie $\delta_i = \partial_{x_i}$, and $L_i = \delta_i^*\delta_i$. Uogólnione transformaty Riesza badane w **H4** są tej samej postaci

$$R_i = \delta_i L^{-1/2}, \qquad i = 1,\dots,d, \tag{4.44}$$

gdzie δ_i jest pewnym operatorem określonym na gęstej podprzestrzeni $L^2(X_i,\mu_i)$,

$$L_i = \delta_i^*\delta_i + a_i, \qquad \text{zaś} \qquad L = \sum_{i=1}^d L_i. \tag{4.45}$$

Powyżej a_i jest nieujemną stałą. Sprzężenie δ_i^* bierzemy względem iloczynu skalarnego na $L^2(X_i,\mu_i)$, gdzie μ_i jest nieujemną miarą Borelowską na X_i taką, że $d\mu_i(x_i) = w_i(x_i)dx_i$ dla pewnej nieujemnej i gładkiej funkcji w_i na X_i. Uściślając, jeśli 0 jest L^2 wartością własną L, to definicja R_i musi być nieco zmodyfikowana; jest to wyjaśnione w Section 2 pracy **H4**. Jednak w tym opisie dla uproszczenia prezentacji zakładamy, że 0 nie jest L^2 wartością własną L. W **H4** zakładamy, że każdy z X_i, $i = 1,\dots,d$, jest odcinkiem otwartym w $\mathbb{R}$, półprostą otwartą w $\mathbb{R}$ lub jest całą prostą rzeczywistą; kładziemy również $X = X_1\times\cdots\times X_d$ i $\mu = \mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_d$. Rozważane przez nas operatory δ_i są postaci

$$\delta_i = p_i(x_i)\,\partial_{x_i} + q_i(x_i), \qquad x_i\in X_i, \tag{4.46}$$

dla pewnych funkcji o wartościach rzeczywistych $p_i\in C^\infty(X_i)$ i $q_i\in C^\infty(X_i)$. Zauważmy, że istotną różnicą między klasycznymi transformatami Riesza i uogólnionymi transformatami Riesza jest fakt, że operatory δ_i i δ_i^* mogą nie komutować.

W **H4** zakładamy, że dla $i = 1,\dots,d$, istnieje baza ortonormalna $\{\varphi^i_{k_i}\}_{k_i\in\mathbb{N}}$ przestrzeni $L^2(X_i,\mu_i)$ złożona z wektorów własnych L_i z odpowiadającymi wartościami własnymi $\{\lambda^i_{k_i}\}_{k_i\in\mathbb{N}}$, tzn.

$$L_i\varphi^i_{k_i} = \lambda^i_{k_i}\varphi^i_{k_i}.$$

Wymagamy aby ciąg $\{\lambda^i_{k_i}\}_{k_i\in\mathbb{N}}$ był ściśle rosnący i aby $\lim_{k_i\to\infty}\lambda^i_{k_i} = \infty$. Zauważmy, że nasze założenia o p_i, q_i, i w_i implikują, że $\varphi^i_{k_i}\in C^\infty(X_i)$ (wynika to z hipoeliptyczności L_i). Kładąc dla $k = (k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{N}^d$,

$$\varphi_k = \varphi^1_{k_1}\otimes\cdots\otimes\varphi^d_{k_d}, \tag{4.47}$$

otrzymujemy bazę ortonormalną na $L^2 := L^2(X,\mu)$ złożoną z wektorów własnych operatora $L = L_1 + \cdots + L_d$. Funkcji φ_k odpowiada wartość własna

$$\lambda_k := \lambda^1_{k_1} + \cdots + \lambda^d_{k_d},$$

tzn. $L\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$. Dalej rozważamy samosprzężone rozszerzenie L (które oznaczamy tym samym symbolem) dane przez

$$Lf = \sum_{k\in\mathbb{N}^d}\lambda_k\,\langle f,\varphi_k\rangle_{L^2}\,\varphi_k$$

z dziedziną

$$\mathrm{Dom}(L) = \{f\in L^2\colon \sum_{k\in\mathbb{N}^d}|\lambda_k|^2|\,\langle f,\varphi_k\rangle_{L^2}\,|^2<\infty\}.$$

Zakładamy, że funkcje $\varphi^i_{k_i}$, $i = 1,\dots,d$, spełniają

$$\left\langle \delta_i\varphi^i_{k_i},\delta_i\varphi^i_{m_i}\right\rangle_{L^2(X_i,\mu_i)} = \left\langle \delta_i^*\delta_i\,\varphi^i_{k_i},\varphi^i_{m_i}\right\rangle_{L^2(X_i,\mu_i)}, \tag{T1}$$

Ponieważ $\varphi_k\in C^\infty(X)$ widzimy, że także $\delta_i\varphi_k\in C^\infty(X)$. Możemy teraz zdefiniować formalnie transformaty Riesza przez

$$R_i f = \sum_{k\in\mathbb{N}^d}\lambda_k^{-1/2}\,\langle f,\varphi_k\rangle_{L^2}\,\delta_i\varphi_k. \tag{4.48}$$

Definiując

$$\mathcal{D} = \mathrm{lin}\{\varphi_k\colon k\in\mathbb{N}^d\}, \qquad \mathcal{D}_i = \delta_i[\mathcal{D}] = \mathrm{lin}\{\delta_i\varphi_k\colon k\in\mathbb{N}^d\}, \quad i = 1,\dots,d,$$

widzimy, że (4.48) jest dobrze określone przynajmniej dla $f\in\mathcal{D}$.

W [105, Proposition 1] autorzy udowodnili, że wektor transformat Riesza

$$\mathbf{R}f = (R_1 f,\dots,R_d f)$$

spełnia

$$\|\mathbf{R}f\|_{L^2(X,\mu)}\leqslant\|f\|_{L^2(X,\mu)}.$$

Głównym celem **H4** było pokazanie wariantu L^p powyższej nierówności na L^2 ze stałą 1 zastąpioną przez $C\max(p,(p-1)^{-1})$, $1<p<\infty$.

Dwa założenia były kluczowe dla pracy **H4**. Po pierwsze, krótki rachunek, vide [105, p. 683], pokazuje, że komutator $[\delta_i,\delta_i^*]$ jest funkcją, która oznaczamy przez v_i. Zakładamy, że

(A1) *funkcje* $v_i, i = 1,\dots,d,$ *są nieujemne.*

Po drugie, nietrudno sprawdzić, że $L=\sum_{i=1}^d L_i$ może być rozłożony na

$$L=\tilde{L}+r, \tag{4.49}$$

gdzie$\tilde{L}$ jest operatorem różniczkowym (bez potencjału - wyrazu stopnia zero) zaś r jest potencjałem. Zakładamy, że

$$\textit{istnieje stała } K\geqslant 0 \textit{ taka, że } \sum_{i=1}^d q_i^2(x_i)\leqslant K\cdot r(x), \tag{A2}$$

W wielu rozważanych przez nas przypadkach możemy przyjąć $K=1$ lub $K=0$. W szczególności, gdy $q_1=\cdots=q_d=0$ to nierówność (A2) zachodzi z $K=0$.

Poza głównymi założeniami (A1) i (A2) zakładaliśmy także w **H4** trzy techniczne warunki (nazywane (T1), (T2), and (T3)).

Gdy 0 nie jest wartością własną L na L^2 głównym wynikiem **H4** jest twierdzenie poniżej.

Twierdzenie 4.50 (Theorem 1 in **H4**). *Niech* $p^*=\max(p,p/(p-1))$. *Wówczas wektor transformat Riesza* $\mathbf{R}f=(R_1f,\dots,R_df)$ *z* R_i *zdefiniowanym w* (4.44) *spełnia oszacowania*

$$\|\mathbf{R}f\|_{L^p(X,\mu)}\leqslant 24(1+\sqrt{K})(p^*-1)\|f\|_{L^p(X,\mu)},\qquad 1<p<\infty.$$

Innymi słowy, kładąc $\delta f=(\delta_1 f,\dots,\delta_d f)$, *mamy*

$$\left\|\delta f\right\|_{L^p(X,\mu)}\leqslant 24(1+\sqrt{K})(p^*-1)\left\|L^{1/2}f\right\|_{L^p(X,\mu)},\qquad 1<p<\infty.$$

Z Twierdzenia 4.50 otrzymujemy niezależne od wymiaru oszacowania na L^p, $1<p<\infty$, dla wektorów transformat Riesza związanych z klasycznymi wielowymiarowymi rozwinięciami ortogonalnymi. Szczegóły podane są w liście przykładów w [Section 5, **H4**]. Dla przykładu w [Section 5.3, **H4**] otrzymujemy niezależne od wymiaru oszacowania dla wektorów transformat Riesza związanych z rozwinięciami Jacobi'ego, co uzupełnia wyniki Nowaka i Sjögrena [104]. Ponadto nasze podejście dostarcza jednolitej teorii oszacowań niezależnych od wymiaru dla wektorów transformat Riesza. W większości wcześniejszych prac każdy z przypadków klasycznych rozwinięć ortogonalnych był traktowany z osobna, vide np. [35], [36], [56], [57], [58], [90], [101], [106], **P8**. Ogólniejsze podejścia zostały niedawno zaproponowane przez Forzani, Sasso i Scotto w [47] i przez autora w **P4**. Prace te jednak badają jedynie niezależne od wymiaru oszacowania dla pojedynczych transformat Riesza a nie dla ich wektora.

Omówmy teraz główne kroki w dowodzie Twierdzenia 4.50. Będziemy potrzebować, dla $i=1,\dots,d$, samosprzężonego rozszerzenia operatora

$$M_i:=\sum_{j\neq i}\delta_j^*\delta_j+\delta_i\delta_i^*=L+[\delta_i,\delta_i^*]=L+v_i,$$

danego w [105, (eq. 5.1)]. Zdefiniujmy następnie zbiór $\mathcal{D}_i$ jako przestrzeń liniową wektorów własnych M_i. Użyjemy również półgrup

$$P_t:=e^{-tL^{1/2}}\qquad\text{and}\qquad Q_t^i:=e^{-tM_i^{1/2}};$$

ich definicja formalna podana jest w [Section 2, **H4**]. Zauważmy, że $P_t[\mathcal{D}]\subseteq\mathcal{D}$ i $Q_t^i[\mathcal{D}_i]\subseteq\mathcal{D}_i$.

Pierwszym głównym składnikiem naszej metody jest następujący wzór.

Propozycja 4.51 (Proposition 2 in **H4**). *Niech* $i=1,\dots,d$. *Wówczas dla* $f\in\mathcal{D}$ *i* $g\in\mathcal{D}_i$ *zachodzi*

$$\langle R_i f,g\rangle_{L^2}=-4\int_0^\infty\left\langle\delta_iP_tf,\partial_tQ_t^ig\right\rangle_{L^2}t\,dt. \tag{4.52}$$

Wzór (4.52) jest substytutem łącznych rachunków funkcyjnych dla pary δ_i i L. Rzeczywiście, ponieważ te operatory nie komutują, nie istnieje ogólny łączny rachunek funkcyjny i możemy zapisać jedynie niektóre konkretne funkcje (δ_i,L). Tutaj chcielibyśmy rozłożyć $R_i=\delta_iL^{-1/2}$ na inne funkcje pary (δ_i,L), z którymi pracuje się łatwiej. Wzór (4.52) dostarcza właśnie takiego rozkładu.

Drugim głównym składnikiem użytym w dowodzie Twierdzenia 4.50 jest pewne włożenie dwuliniowe jak w pracach [20, 35, 37, 87]. Dla $N\in\mathbb{N}$ (tak naprawdę interesuje nas $N=1$ i $N=d$) i funkcji $F=(f_1,\dots,f_N):X\times(0,\infty)\to\mathbb{R}^N$ kładziemy

$$|F|_*^2:=r|F|^2+|\partial_tF|^2+\sum_{i=1}^d|\delta_iF|^2; \tag{4.53}$$

przypomnijmy, że r jest potencjałem ze wzoru (4.49). Wartości bezwzględne $|\cdot|$ w (4.53) oznaczają normy Euklidesowe na $\mathbb{R}^N$ wektorów $F(x,t)$, $\partial_t F(x,t) = (\partial_t f_1(x,t), \ldots, \partial_t f_N(x,t))$, oraz $\delta_i F(x,t) = (\delta_i f_1(x,t), \ldots, \delta_i f_N(x,t))$, gdzie $(x,t) \in X \times (0,\infty)$. Poniżej przedstawiamy nasze twierdzenie o dwuliniowym włożeniu. W jego dowodzie warunek (A1) jest kluczowy.

Twierdzenie 4.54 (Theorem 3 in **H4**). *Niech $f : X \to \mathbb{R}$ and $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_d) : X^d \to \mathbb{R}^d$ i załóżmy, ze $f \in \mathcal{D}$ i $g_i \in \mathcal{D}_i$, for $i = 1, \ldots, d$. Określmy*

$$F(x,t) = P_t f(x) \qquad i \qquad G(x,t) = Q_t\mathbf{g} = (Q_t^1 g_1, \ldots, Q_t^d g_d).$$

Wówczas zachodzi

$$\int_0^\infty \int_X |F(x,t)|_* \, |G(x,t)|_* \, d\mu(x) \, t \, dt \leqslant 6\,(p^*-1)\|f\|_p \|\mathbf{g}\|_q. \tag{4.55}$$

Dowód powyższego twierdzenia jest podany w [Section 4, **H4**]. Jest on bliski dowodom podobnych twierdzeń z [20, 35, 37, 87]. Kluczowym składnikiem dowodu Twierdzenia 4.54 jest konkretna funkcja - *funkcja Bellmana* wprowadzona przez Nazarova i Treila. Weźmy $p \geqslant 2$. Niech $q = p/(p-1)$,

$$\gamma = \gamma(p) = \frac{q(q-1)}{8},$$

i zdefiniujmy $\beta_p \colon [0,\infty)^2 \to [0,\infty]$ przez

$$\beta_p(s_1,s_2) = s_1^p + s_2^q + \gamma \begin{cases} s_1^2\, s_2^{2-q} & ; \ s_1^p \leqslant s_2^q \\ \dfrac{2}{p}\, s_1^p + \left(\dfrac{2}{q} - 1\right) s_2^q & ; \ s_1^p \geqslant s_2^q\,. \end{cases}$$

Dla $m = (m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$ funkcją Bellmana Nazarova-Treila dla p, m jest funkcja

$$B = B_{p,m} \colon \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \to [0,\infty)$$

zdefiniowana dla dowolnych $\zeta \in \mathbb{R}^{m_1}$ i $\eta \in \mathbb{R}^{m_2}$, przez

$$B_{p,m}(\zeta,\eta) = \frac{1}{2}\beta_p(|\zeta|, |\eta|).$$

Funkcja B ma swoje początki w artykule [99] F. Nazarova i S. Treila. Następnie została ona użyta (i uproszczona) w [20, 21, 35, 37, 38]. Dowód (4.54) opiera się na pewnych konkretnych własnościach B, vide Proposition 4 w **H4**.

Za pomocą Propozycji 4.51 i Twierdzenia 4.54 łatwo wywnioskować Twierdzenie 4.50; poniżej przedstawiamy krótki argument.

Dowód Twierdzenia 4.50 (szkic). Wystarczy pokazać, że dla $f \in L^p$ i $g_i \in L^q$, $i = 1, \ldots, d$, wartość bezwzględna z $\sum_{i=1}^d \langle R_i f, g_i\rangle$ nie przekracza

$$24(1+\sqrt{K})(p^*-1)\|f\|_p \left\| \left(\sum_{i=1}^d |g_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_q.$$

Argument gęstościowy pozwala nam wziąć $f \in \mathcal{D}$ i $g_i \in \mathcal{D}_i$, $i = 1, \ldots, d$. Wówczas z Propozycji 4.51 mamy

$$-\frac{1}{4}\langle R_i f, g_i\rangle_{L^2} = \int_0^\infty \left\langle \delta_i P_t f, \partial_t Q_t^i g_i \right\rangle_{L^2} t\,dt + \int_0^\infty \left\langle q_i P_t f, \partial_t Q_t^i g_i \right\rangle_{L^2} t\,dt.$$

Założenie (A2) daje

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^d \langle R_i f, g_i\rangle_{L^2} \right| \\ &\leqslant 4 \int_0^\infty \int_X \left(\left(\sum_{i=1}^d |\delta_i P_t f(x)|^2 \right)^{1/2} + \sqrt{K}\sqrt{r(x)}|P_t f(x)| \right) |G(x,t)|_* \, d\mu(x)\, t\, dt \\ &\leqslant 4(1+\sqrt{K}) \int_0^\infty \int_X |F(x,t)|_* \, |G(x,t)|_* \, d\mu(x)\, t\, dt \end{aligned}$$

i zastosowanie Twierdzenia 4.54 kończy dowód. $\square$

4.3.7. **'L^p spherical multipliers on homogeneous trees', artykuł H5**. W pracy tej scharakteryzowaliśmy, dla każdego $p \in [1,\infty) \setminus \{2\}$, mnożniki sferyczne na L^p dla drzewa jednorodnego w terminach mnożników fourierowskich na L^p dla torusa. Przejdźmy do opisu.

Drzewem jednorodnym stopnia q spójny graf $\mathcal{T}$ bez pętli taki, że każdy punkt $x \in \mathcal{T}$ ma dokładnie $q+1$ sąsiadów. Zakładamy od teraz, że $q \geqslant 2$. Przypadek $q = 1$ nie jest interesujący z punktu widzenia naszych celów, ponieważ wtedy drzewo pokrywa się zasadniczo ze zbiorem liczb całkowitych. Na drzewie $\mathcal{T}$ będziemy rozważać miarę liczącą i naturalną odległość. Zauważmy, że w tej sytuacji kule mają eksponencjalny wzrost objętości.

Warto nadmienić, że w przypadku gdy q jest nieparzyste (a zatem $q+1$ parzyste), przykładem drzewa jednorodnego jest graf Caley'a grupy wolnej o $(q+1)/2$ generatorach.

Ustalmy dowolny punkt odniesienia o w $\mathcal{T}$ (środek drzewa) i oznaczmy przez G grupę izometrii $\mathcal{T}$ zaś przez G_o stabilizator o w grupie G. Grupa G_o jest wtedy maksymalną zwartą podgrupą G. Odwzorowanie $g \mapsto g \cdot o$ identyfikuje $\mathcal{T}$ z przestrzenią ilorazową G/G_o. Z każdą funkcją f na $\mathcal{T}$ można związać G_o-niezmienniczą funkcję f' na G określając $f'(g) = f(g \cdot o)$; w ten sposób można otrzymać dowolną G_o-niezmienniczą funkcję na G. Przez $d(x,y)$ oznaczać będziemy odległość $x, y \in \mathcal{T}$ piszemy też $|x| = d(x,o)$. Funkcję f na $\mathcal{T}$ nazywamy radialną, jeśli $f(x)$ zależy tylko od $|x|$, lub równoważnie, jeśli f jest G_o-niezmiennicza, lub jeśli f' jest G_o-bi-niezmiennicza.

Wiadomo, że G-niezmiennicze operatory liniowe na $L^p(\mathcal{T})$ odpowiadają operatorom liniowym na $L^p(G/G_o)$ które są zadane przez prawostronny splot z G_o–bi-niezmienniczymi jądrami. Splot $f' \in L^p(G/G_o)$ z G_o–bi-niezmienniczym jądrem k' jest zdefiniowany przez

$$f' * k'\,(g \cdot o) = \int_G f'(h \cdot o) k'(h^{-1} g \cdot o)\, \mathrm{d}h, \qquad g \in G.$$

Oznaczmy przez $Cv_p(\mathcal{T})$ przestrzeń funkcji radialnych na $\mathcal{T}$ które odpowiadają tym G_o–bi-niezmienniczym jądrom. Wówczas norma funkcji k w przestrzeni $Cv_p(\mathcal{T})$ jest określona jako norma odpowiadającego jej operatora prawostronnego splotu na $L^p(G/G_o)$, lub równoważnie, jako norma odpowiadającego k operatora G_o-niezmienniczego na $L^p(\mathcal{T})$. Normę tę oznaczać będziemy przez $\|k\|_{Cv_p(\mathcal{T})}$.

Przez $Cv_p(\mathbb{Z})$ oznaczamy przestrzeń jąder splotowych związanych z niezmienniczymi na przesunięcia operatorami na $L^p(\mathbb{Z})$. Normą funkcji k należącej do $Cv_p(\mathbb{Z})$ jest norma odpowiadającego jej operatora splotu na $L^p(\mathbb{Z})$. Połóżmy $\tau := 2\pi/\log q$ i niech $\mathcal{F}$ będzie transformatą Fouriera na $\mathbb{Z}$ zadaną przez

$$\mathcal{F}F(s) = \sum_{d \in \mathbb{Z}} F(d)\, q^{-ids} \qquad s \in \mathbb{T}, \tag{4.56}$$

gdzie $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(\tau\mathbb{Z})$. Przez $\mathcal{M}_p(\mathbb{T})$ oznaczamy przestrzeń (ograniczonych) funkcji na $\mathbb{T}$ postaci $\mathcal{F}k$, gdzie k is in $Cv_p(\mathbb{Z})$. Normą funkcji $\mathcal{F}k \in \mathcal{M}_p(\mathbb{T})$ w tej przestrzeni jest $\|k\|_{Cv_p(\mathbb{Z})}$.

Dla $p \in [1,\infty]$ oznaczmy $\delta(p) = \big|1/p - 1/2\big|$ i $p' = p/(p-1)$. Dla dowolnego $t > 0$, przez $\mathbf{S}_t$ i $\overline{\mathbf{S}}_t$ oznaczamy odpowiednio pas $\{z \in \mathbb{C} : |\Im z| < t\}$ i jego domknięcie. Dla funkcji holomorficznej f na $\mathbf{S}_t$ i $v \in (-t,t)$ oznaczamy przez f_v funkcję na $\mathbb{T}$ zadaną przez $f_v(u) = f(u+iv)$. Piszemy także f_t i f_{-t} dla oznaczenia wartości brzegowych f, o ile te istnieją w sensie dystrybucyjnym.

Opiszemy teraz pokrótce sferyczną analizę harmoniczną na $\mathcal{T}$. Funkcjami sferycznymi nazywamy radialne funkcje własne laplasjanu

$$Lf(x) = f(x) - \frac{1}{q+1} \sum_{y:\, d(x,y)=1} f(y), \tag{4.57}$$

które spełniają warunek $\phi(o) = 1$. Funkcje sferyczne dane są jawnym wzorem

$$\phi_z(x) = \begin{cases} \Big(1 + \dfrac{q-1}{q+1}|x|\Big)\, q^{-|x|/2} & z \in \tau\mathbb{Z} \\ \Big(1 + \dfrac{q-1}{q+1}|x|\Big)\, q^{-|x|/2}(-1)^{|x|} & z \in \tau/2 + \tau\mathbb{Z} \\ \mathbf{c}(z)\, q^{(iz-1/2)|x|} + \mathbf{c}(-z)\, q^{(-iz-1/2)|x|} & z \in \mathbb{C} \setminus (\tau/2)\mathbb{Z}, \end{cases}$$

gdzie $\tau := 2\pi/\log q$ zaś $\mathbf{c}$ jest funkcją meromorficzną zadaną przez

$$\mathbf{c}(z) = \frac{q^{1/2}}{q+1}\, \frac{q^{1/2+iz} - q^{-1/2-iz}}{q^{iz} - q^{-iz}} z \in \mathbb{C} \setminus (\tau/2)\mathbb{Z}.$$

Łatwo zauważyć, że dla każdego $x \in \mathcal{T}$ funkcja $z \mapsto \phi_z(x)$ jest funkcją całkowitą na $\mathbb{C}$ spełniającą

$$|\phi_z(x)| \leqslant 1, \qquad x \in \mathcal{T}, \quad z \in \overline{\mathbf{S}}_{1/2}.$$

Sferyczną transformatę Fouriera $\widetilde{f}$ funkcji radialnej $f \in L^1(\mathcal{T})$ definiujemy jako

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{x \in \mathcal{T}} f(x)\, \phi_z(x), \qquad z \in \overline{\mathbf{S}}_{1/2}.$$

Funkcja $\widetilde{f}$ jest parzysta i τ-okresowa w pasie $\mathbf{S}_{1/2}$, ponieważ to samo jest prawdą dla ϕ_z. Powiemy, że funkcja holomorficzna w pasie $\mathbf{S}_{\delta(p)}$ jest *niezmiennicza na grupę Weyla* jeśli spełnia powyższe warunki w pasie $\mathbf{S}_{\delta(p)}$ zamiast w $\mathbf{S}_{1/2}$. Przez $\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z}$ będziemy oznaczać torus $\mathbb{T}$, który zwykle utożsamiamy z $[-\tau/2, \tau/2)$. Zdefiniujmy $c_G = \dfrac{q \log q}{4\pi(q+1)}$.

Z [32, formula (3), p. 55] wiadomo, że wzór na odwrócenie dla sferycznej transformaty Fouriera może być zapisany jako

$$f(x) = 2\, c_G\, q^{-|x|/2} \int_{\mathbb{T}} \widetilde{f}(s)\, \mathbf{c}(-s)^{-1}\, q^{is|x|}\, \mathrm{d}s. \tag{4.58}$$

Przypominamy, że transformata Fouriera $\mathcal{F}$ na $\mathbb{Z}$ jest zdefiniowana w (4.56); tutaj wzór na odwrócenie przyjmuje postać

$$F(j) = \frac{1}{\tau} \int_{\mathbb{T}} \mathcal{F}F(s)\, q^{i\xi s}\, \mathrm{d}s, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Funkcja $\mathcal{F}F$ jest oczywiście τ-okresowa na $\mathbb{R}$. Powiemy, że dystrybucja m na $\mathbb{T}$ należy do $\mathcal{M}_p(\mathbb{T})$ jeśli splot z $\mathcal{F}^{-1}m$ definiuje ograniczony operator na $L^p(\mathbb{Z})$. Zauważmy, że ponieważ $\mathcal{M}_p(\mathbb{T})$ jest podzbiorem $\mathcal{M}_2(\mathbb{T})$ zaś $\mathcal{M}_2(\mathbb{T})$ możemy utożsamiać z $L^\infty(\mathbb{T})$, to zbiór $\mathcal{M}_p(\mathbb{T})$ zawiera się w $L^\infty(\mathbb{T})$.

Analogon na drzewach jednorodnych znanego wyniku Clerca i Steina [24] stwierdza że jeśli $k \in Cv_p(\mathcal{T})$, to sferyczna transformacja Fouriera $\widetilde{k}$ rozszerza się do ograniczonej funkcji holomorficznej w pasie $\mathbf{S}_{\delta(p)}$. Ten warunek konieczny został poprawiony przez Cowlinga, Medę i Setti'ego w [31, Theorem 2.1], którzy udowodnili, że dla $k \in Cv_p(\mathcal{T})$ wartości brzegowe $\widetilde{k}_{\delta(p)}$ funkcji $\widetilde{k}$ należą do $\mathcal{M}_p(\mathbb{T})$. W [31] autorzy pokazali także, że jeśli $\widetilde{k}_{\delta(p)} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{T})$ to wówczas operator prawostronnego splotu z k jest ograniczony na podprzestrzeni funkcji *radialnych* w $L^p(\mathcal{T})$. Inspiracją dla [31] były wcześniejsze prace Szwarca [114] i Pytlika [107]. W szczególności, Pytlik wykazał, że nieujemna funkcja radialna k należy do $Cv_p(\mathcal{T})$ wtedy i tylko wtedy gdy k należy do przestrzeni Lorentza $L^{p,1}(\mathcal{T})$. Doprowadziło to Cowlinga, Medę i Setti'ego do udowodnienia ostrej formy fenomenu Kunze - Steina na pełnej grupie G [31, Theorem 1] (patrz także [100] dla słabszej wersji fenomenu Kunze-Steina na G). Głównym wynikiem pracy **H5** jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.59 (Theorem 4.3, **H5**). *Ustalmy $p \in [1,\infty) \setminus \{2\}$ i niech k będzie funkcją radialną na $\mathcal{T}$. Następujące warunki są równoważne*

(i) *k należy do $Cv_p(\mathcal{T})$;*

(ii) *$\widetilde{k}$ jest holomorficzną, parzystą i τ-okresową funkcją na $\mathbf{S}_{\delta(p)}$ oraz $\widetilde{k}_{\delta(p)}$ należy do $\mathcal{M}_p(\mathbb{T})$.*

Co więcej, istnieją nieujemne stałe c i C, niezależne od k i takie, że

$$c\, \|\widetilde{k}_{\delta(p)}\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{T})} \leqslant \|k\|_{Cv_p(\mathcal{T})} \leqslant C\, \|\widetilde{k}_{\delta(p)}\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{T})}.$$

Twierdzenie 4.59 orzeka, że scharakteryzowanie ograniczonych na $L^p(\mathcal{T})$ operatorów prawostronnego splotu z jądrami radialnymi na drzewie jednorodnym jest tożsame ze scharakteryzowaniem pewnych ograniczonych na $L^p(\mathbb{T})$ operatorów splotowych na torusie. Wynik ten może być również wyrażony w języku rachunków funkcyjnych na $L^p(\mathcal{T})$ dla laplasjanu zdefiniowanego w (4.57). Jest tak, ponieważ $L\phi_z = (1-\gamma(z))\phi_z$ gdzie γ jest funkcją całkowitą $\gamma(z) = 2q^{1/2}(q+1)^{-1/2}\cos(2\pi z/\tau)$. Stąd wynika, że $(m(L)f)(x) = (f * k)(x)$, $x \in \mathcal{T}$ z jądrem k określonym przez $\widetilde{k}(z) = m(1-\gamma(z))$.

Dowód twierdzenia 4.59 opiera się na połączeniu technik [31] z uogólnieniem metod transferencji opracowanych przez A.D. Ionescu [68, 69] do badania przestrzeni symetrycznych typu niezwartego i rzędu 1. Nasze wyniki transferencyjne są podane jako Theorem 3.3 i Corollary 3.4 w **H5**.

Resztę tej sekcji poświęcimy na omówienie Corollary 3.4 z **H5** i jego znaczenia dla dowodu Twierdzenia 4.59. Tak naprawdę omówimy uproszczoną wersję Corollary 3.4, która jednak wystarcza dla zastosowań w **H5**.

Niech Γ będzie grupą lokalnie zwartą. Załóżmy, że Γ jest produktem półprostym dwóch grup unimodularnych M i H, gdzie M jest podgrupą normalną w Γ, zaś H działa na M przez sprzęganie. Miarę Haara na M i H będziemy oznaczać odpowiednio przez $\mathrm{d}n$ i $\mathrm{d}h$. Wówczas $\mathrm{d}g = \mathrm{d}n\,\mathrm{d}h$ jest prawą miarą Haara na Γ. Dla $h \in H$ i $n \in M$ oznaczamy przez n^h operację sprzężenia hnh^{-1}, zaś przez $\mathcal{D}(h)^{-1}$ pochodną Radona-Nikodyma $\mathrm{d}(n^h)/\,\mathrm{d}n$. Łatwo sprawdzić, że $\mathcal{D}$ jest homomorfizmem H tzn. $\mathcal{D}(hh') = \mathcal{D}(h)\,\mathcal{D}(h')$ dla każdego h, h' należących do H.

Wiadomo, że $\mathcal{D}(h)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}h$ jest lewą miarą Haara na Γ (vide [63, s. 211]) oraz, że

$$\int_\Gamma f(g)\,\mathrm{d}\lambda(g) = \int_M \int_H f(nh)\,\mathcal{D}(h)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}h = \int_H \int_M f(hn)\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}h.$$

Definiujemy $L^1(M; Cv_p(H))$ jako przestrzeń wszystkich dystrybucji κ na Γ takich, że dla (prawie) każdego $n \in M$ dystrybucja $\kappa(n\cdot)$ zadaje ograniczony operator splotowy na $L^p(H)$, zaś funkcja $n \mapsto \|\kappa(n\cdot)\|_{Cv_p(H)}$ należy do $L^1(M)$. Na przestrzeni $L^1(M; Cv_p(H))$ rozważamy normę

$$\|\kappa\|_{L^1(M;Cv_p(H))} := \int_M \|\kappa(n\cdot)\|_{Cv_p(H)}\,\mathrm{d}\lambda(n). \tag{4.60}$$

W pracy **H5** udowodniliśmy następujący lemat.

Lemat 4.61 (Słabsza wersja Corollary 3.4 z **H5**)**.** *Załóżmy, że κ należy do $L^1(M; Cv_p(H))$. Wówczas operator $f \mapsto f * (\mathcal{D}^{-1/p}\,\kappa)$ jest ograniczony na $L^p(\Gamma)$. Zachodzi także oszacowanie*

$$\|f * (\mathcal{D}^{-1/p}\,\kappa)\|_{L^p(\Gamma)} \leqslant \|f\|_{L^p(\Gamma)}\,\|\kappa\|_{L^1(M;Cv_p(H))}\,.$$

Lemat 4.61 jest przydatny ze względu na istnienie rozkładu Iwasawy na grupie G. Mianowicie można zapisać

$$G = NAG_o, \tag{4.62}$$

gdzie A jest grupą Abelową zaś N jest grupą nilpotentną. W rozkładzie (4.62) grupa A działa na N przez sprzężenia, tak więc NA jest produktem półprostym. Wzór (4.62) był badany w [45, 117] zaś w **H5** podajemy go jako Theorem 2.1. Jest on analogonem rozkładu Iwasawy na półprostych grupach Liego. Stosując (4.62) możemy przejść z badania radialnego jądra k na $\mathcal{T}$ do badania jądra na NA zadanego przez $\kappa(na) = k(na\cdot o)$. Co więcej, przejście to zachowuje normę, tzn. $\|k\|_{Cv_p(\mathcal{T})} \leqslant \|\mathcal{D}^{-1/p}\,\kappa\|_{Cv_p(NA)}$, dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Przypomnijmy, ze $\mathcal{D}(h)^{-1}$ oznacza pochodną Radona-Nikodyma $\mathrm{d}(n^h)/\,\mathrm{d}n$ operacji sprzęgania $n^h = hnh^{-1}$. Korzystając z Wniosku 4.61 pozostaje nam oszacować $\|\kappa\|_{L^1(N;Cv_p(A))}$.

5. Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

Przejdźmy teraz do opisu naszych pozostałych osiągnieć. Prace **P6, P8, P10, P11** powstały podczas moich studiów magisterskich i na początku studiów doktoranckich. Prace **P2, P3, P5, P7, P9** stanowią część mojej rozprawy doktorskiej; **P2** została napisana po doktoracie ale w zasadzie pokrywa się z rozdziałem 6 rozprawy doktorskiej. Artykuły **P1, S1, S2** zostały napisane po doktoracie.

Podział na kategorie poniżej nie jest bardzo rygorystyczny jako, ze niektóre z prac należą do dwóch kategorii.

5.1. **Niezależne od wymiaru oszacowania dla operatorów średniujących.** Artykuły **P1, S1**.

Wszystkie opisane tu wyniki zostały uzyskane we współpracy z J. Bourgainem, M. Mirkiem i E. M. Steinem.

W pracy **P1** badamy niezależne od wymiaru oszacowania na $L^p(\mathbb{R}^d)$ półnorm r-wariacyjnych dla ciągłych operatorów średniujących Hardy-Littlewooda w $\mathbb{R}^d$. Natomiast w artykule **S1** zajmujemy się niezależnymi od wymiaru oszacowaniami na $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ dla funkcji maksymalnych i półnorm r-wariacyjnych w kontekście dyskretnym.

W tej sekcji przez G oznaczamy symetryczny, wypukły i domknięty podzbiór $\mathbb{R}^d$ o niepustym wnętrzu, definiujemy też $G_t = \{y \in \mathbb{R}^d\colon t^{-1}y \in G\}$, $t > 0$. Taki zbiór G będziemy nazywać symetrycznym ciałem wypukłym.[3]

Opis P1.

[3] W literaturze zwykle przyjmuje się, że G jest otwarty. Ponieważ brzeg zbioru wypukłego jest miary Lebesgue'a 0 w $\mathbb{R}^d$ nie ma większego znaczenia czy rozważamy zbiory G otwarte czy domknięte. W kontekście dyskretnym z powodów technicznych lepiej jest pracować ze zbiorami domkniętymi.

Niech G będzie symetrycznym ciałem wypukłym. Rozważmy całkowy operator średniujący Hardy'ego-Littlewooda na $\mathbb{R}^d$ dany przez

$$M_t^G f(x) = \frac{1}{|G_t|}\int_{G_t} f(x-y)\mathrm{d}y, \tag{5.1}$$

dla $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Badania niezależnych od wymiaru oszacowań dla norm $L^p(\mathbb{R}^d)$ funkcji maksymalnych Hardy'ego-Littlewooda $\sup_{t>0}|M_t^G f(x)|$ (G jest symetrycznym ciałem wypukłym) rozpoczęły w latach 80. prace Steina [111, 112]. Temat został następnie rozwinięty przez Bourgaina [13, 14], Carbery'ego [18], i Müllera [95]. Nowe wyniki w tej dziedzinie zostały niedawno otrzymane przez Aldaza [3] i Bourgaina [15]. Kompleksowe podsumowanie oszacowań niezależnych od wymiaru zawarte jest w artykule [19]. Wiadomo, że

$$\|\sup_{t>0}|M_t^G f|\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_p(G,d)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \tag{5.2}$$

dla wszystkich $1 < p < \infty$, gdzie $C_p(G,d)$ jest pewną nieujemną stałą. Pytanie które sobie stawiamy brzmi: czy można otrzymać stałą C_p w (5.2) zależną tylko od p. Jeśli jest to niemożliwe, to czy możemy chociaż pokazać (5.2) ze stałą zależną tylko od p dla klasy ciał G? Z prac Bourgaina [14] i Carbery'ego [18] wiemy, że (5.2) zachodzi dla $p > 3/2$ z $C_p(G,d) = C_p$ zależnym tylko od p. Głównym otwartym problemem w tej dziedzinie jest próba rozszerzenia tego wyniku do $p > 1$.

Dla $r \in [1,\infty)$ definiujemy półnormę r-wariacyjna V_r funkcji $(0,\infty)\times\mathbb{R}^d \ni (t,x) \mapsto \mathfrak{a}_t(x)$ jako

$$V_r(\mathfrak{a}_t(x) : t \in Z) = \sup_{\substack{0<t_0<\ldots<t_J\\ t_j\in Z}} \Big(\sum_{j=0}^{J} |\mathfrak{a}_{t_{j+1}}(x) - \mathfrak{a}_{t_j}(x)|^r\Big)^{1/r}.$$

Zbiór Z powyżej jest podzbiorem $(0,\infty)$ zaś supremum jest brane po wszystkich rosnących ciągach w Z. Ponieważ $\sup_{t\in Z}|\mathfrak{a}_t(x)| \leqslant V_r(\mathfrak{a}_t(x) : t \in Z) + a_{t_0}(x)$, dla $t_0 \in Z$, to badanie półnormy wariacyjnej jest trudniejsze niż badanie normy supremum. Główną zaletą półnormy wariacyjnej jest fakt, że skończoność $V_r(\mathfrak{a}_t(x) : t \in (0,\infty))$ implikuje istnienie obu granic $\lim_{t\to 0^+}\mathfrak{a}_t(x)$ oraz $\lim_{t\to\infty}\mathfrak{a}_t(x)$. Zatem, jeśli pytamy o zbieżność punktową rodziny operatorów nie musimy szukać gęstej klasy na której zbieżność jest znana. Ta obserwacja ma znaczenie w niektórych pytaniach z teorii ergodycznej.

Jednym z głównych wyników otrzymanych w **P1** jest następujące twierdzenie

Twierdzenie 5.3 (Theorem 1.1 in **P1**). *Niech $p \in (3/2, 4)$ i niech $r \in (2,\infty)$. Wówczas istnieje stała $C_{p,r} > 0$ niezależna od wymiaru $d \in \mathbb{N}$ i taka, że dla dowolnego symetrycznego ciała wypukłego $G \subset \mathbb{R}^d$ zachodzi*

$$\big\|V_r(M_t^G f : t > 0)\big\|_{L^p} \leqslant C_{p,r}\|f\|_{L^p} \tag{5.4}$$

dla wszystkich $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Założenie $p > 3/2$ w Twierdzeniu 5.3 może być osłabione, jeśli rozważymy tylko długie r-wariacje (wariacje wzdłuż zbioru lakunarnego $Z = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$). Wariant lakunarny Twierdzenia 5.3 to Theorem 1.2 w **P1**.

Ponadto ograniczając naszą uwagę do kul związanych z normą ℓ^q w $\mathbb{R}^d$ potrafimy otrzymać pełny zakres p w Twierdzeniu 5.3. Dla $q \in [1,\infty)$ kule te są zdefiniowane przez

$$\begin{aligned} B_q &= \Big\{x = (x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^d : |x|_q = \Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant d} |x_k|^q\Big)^{1/q} \leqslant 1\Big\},\\ B_\infty &= \{x = (x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^d : |x|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant d}|x_k| \leqslant 1\}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Twierdzenie 5.6 (Theorem 1.3 in **P1**). *Załóżmy, że $G = B_q$ jest jedną z kul (5.5) dla pewnego $q \in [1,\infty]$. Niech $p \in (1,\infty)$ i niech $r \in (2,\infty)$. Wówczas istnieje stała $C_{p,q,r} > 0$ niezależna od wymiaru d taka, że*

$$\big\|V_r(M_t^G f : t > 0)\big\|_{L^p} \leqslant C_{p,q,r}\|f\|_{L^p} \tag{5.7}$$

dla wszystkich $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Zakres parametru $r \in (2, \infty)$ w Twierdzeniach 5.3 i 5.6 jest ostry, vide [70].

Nadmieńmy, że zależne od wymiaru oszacowania jak w Twierdzeniu 5.3 z ostrymi zakresami parametrów $p \in (1, \infty)$ i $r \in (2, \infty)$ wynikają z [92, Theorem A.1]. Pozbycie się zależności od wymiaru wymagało jednak nowych idei.

Wśród narzędzi użytych w **P1** warto wymienić: niezależną od wymiaru teorię Littlewooda-Paley'a, wariacyjny wariant zasady prawie ortogonalności z pracy [18], oraz oszacowania transformat Foureira z [13]. Dodatkowo, skorzystaliśmy z pewnej nierówności numerycznej [Lemma 2.1, **P1**], która pozwala kontrolować półnormę wariacyjną przez odpowiednią sumę funkcji kwadratowych.

Opis S1. Przez analogię do sytuacji ciągłej w kontekście dyskretnym dla $x \in \mathbb{Z}^d$, $t > 0$ i dowolnej funkcji $f \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$ rozważamy

$$\mathcal{M}_t^G f(x) = \frac{1}{|G_t \cap \mathbb{Z}^d|} \sum_{y \in G_t \cap \mathbb{Z}^d} f(x-y). \tag{5.8}$$

Powyższy wzór zadaje dyskretny operator średniujący Hardy'ego–Littlewooda na $G_t \cap \mathbb{Z}^d$, gdzie G jest symetrycznym ciałem wypukłym w $\mathbb{R}^d$. W **S1** badaliśmy oszacowania niezależne od wymiaru na $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ dla funkcji maksymalnych związanych ze średnimi $\mathcal{M}_t^G$. Łatwo pokazać, że dla $p \in (1, \infty]$ i dowolnego symetrycznego ciała wypukłego $G \subset \mathbb{R}^d$ istnieje stała $C_p(d, G) > 0$ taka, że dla $f \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$ mamy

$$\|\sup_{t>0} |\mathcal{M}_t^G f|\|_{\ell^p} \leqslant C_p(d, G)\|f\|_{\ell^p}. \tag{5.9}$$

Można domniemywać, że niezależne od wymiaru d oszacowania w (5.9) da się otrzymać z niezależnych od wymiaru oszacowań na $L^p(\mathbb{R}^d)$ przez porównanie funkcji maksymalnej dla średnich $\mathcal{M}_t^G$ na $\mathbb{Z}^d$ z funkcją maksymalną dla średnich M_t^G na $\mathbb{R}^d$. Jest tak rzeczywiście, ale tylko gdy ograniczymy się to dużych t. Mianowicie, w [Proposition 2.1, **S1**], pokazaliśmy, że dla dowolnego symetrycznego ciała wypukłego $G \subset \mathbb{R}^d$ istnieje $t_G > 0$ takie, że norma $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ funkcji maksymalnej $\sup_{t>t_G} |\mathcal{M}_t^G f|$ jest szacowana z góry przez normę $L^p(\mathbb{R}^d)$ jej ciągłego odpowiednika $\sup_{t>0} |M_t^G f|$. Co więcej, stała w tym oszacowaniu nie zależy od d. Obserwacja ta sprowadza cały problem do badania $\sup_{0<t\leqslant t_G} |\mathcal{M}_t^G f|$.

Okazuje się, że fenomen oszacowań niezależnych od wymiaru w kontekście dyskretnym jest znacznie rzadszy niż w kontekście ciągłym. Mianowicie, w [Theorem 1, **S1**] skonstruowaliśmy kontrprzykład - symetryczne ciało wypukłe E (dokładniej elipsoidę) w $\mathbb{Z}^d$, dla którego normy $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$, $1 < p < \infty$, funkcji maksymalnej $\sup_{t>0} |\mathcal{M}_t^G f|$ rosną z wymiarem. Kontrprzykład ten pokazuje, że pytanie o oszacowania niezależne od wymiaru dla dyskretnych operatorów maksymalnych Hardy'ego-Littlewooda jest znacznie subtelniejsze niż w przypadku ciągłym. W szczególności nie ma żadnej oczywistej hipotezy do udowodnienia. Dlatego warto postawić sobie pytanie, czy możemy spodziewać się oszacowań niezależnych od wymiaru na $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ dla konkretnych funkcji maksymalnych $\sup_{t>0} |\mathcal{M}_t^{B^q} f|$, związanych z kulami B^q zadanymi przez (5.5) dla $q \in [1, \infty]$. W przypadku gdy $q \neq \infty$ pytanie to jest znacznie trudniejsze w kontekście dyskretnym ze względu na brak rozsądnych oszacowań dla liczby punktów kratowych w kulach B^q. Z tego powodu nawet otrzymanie teorii ℓ^2 wydaje się niełatwe. Badania w tym temacie są częścią naszego wspólnego projektu z J. Bourgainem, M. Mirkiem i E. M. Steinem.

Jeśli chodzi o **S1** to w pracy tej udało nam się otrzymać pewne wyniki dla kostki, tj. w przypadku $q = \infty$. Kluczowa była tu obserwacja, że ilość punktów kratowych w B_t^∞ jest dana jawnym wzorem, mianowicie $|B_t^\infty \cap \mathbb{Z}^d| = (2[t] + 1)^d$. Dla uproszczenia notacji oznaczamy $Q_t := B_t^\infty = [-t, t]^d$ dla $t > 0$ i kładziemy $Q = [-1, 1]^d$. Jednym z głównych twierdzeń z **S1** jest następujące oszacowanie funkcji maksymalnej.

Twierdzenie 5.10 (Theorem 2 in **S1**)**.** *Dla każdego $p \in (3/2, \infty]$ istnieje stała $C_p > 0$ taka, że dla dowolnego $d \in \mathbb{N}$ i każdej $f \in \ell^p(\mathbb{Z}^d)$ zachodzi*

$$\|\sup_{t>0} |\mathcal{M}_t^Q f|\|_{\ell^p} \leqslant C_p\|f\|_{\ell^p}. \tag{5.11}$$

Ograniczając supremum w (5.11) do diadycznych czasów, tj. $t \in \{2^n : n \in \mathbb{N}_0\}$, gdzie $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, możemy rozszerzyć zakres p do $1 < p < \infty$, vide Theorem 3 w **S1**.

W pracy **S1** otrzymaliśmy także odpowiedniki r-wariacyjne Twierdzenia 5.10 i jego diadycznej wersji, vide Theorems 4 i 5 w **S1**.

Dowód Twierdzenia 5.10 jest oparty do pewnego stopnia na ideach z jego ciągłego odpowiednika. Nowe dodane składniki dowodu to m.in. : dyskretna półgrupa i dyskretna nierówność Littlewooda-Paley'a dla tej półgrupy [Section 4.1, **S1**], dyskretna zasada prawie ortogonalności [Section 4.2, **S1**], oraz dyskretna nierówność numeryczna [Lemma 4.2, **S1**]. Być może główną nową obserwacją są niezależne od wymiaru oszacownia transformaty Fourier funkcji charakterystycznej $Q_t \cap \mathbb{Z}^d$ z [Section 3, **S1**]. Oszacowania te musiały być udowodnione bezpośrednio jako, że ciągłe metody z [13] nie znajdują zastosowania w kontekście dyskretnym.

5.2. **Łączne mnożniki spektralne.** Prace **P2, P3, P5, P7, P9, S2**.

Wspólnym celem powyższych prac było otrzymanie łącznych rachunków funkcyjnych dla układu komutujących operatorów $L = (L_1, \ldots, L_d)$. Rozważaliśmy zarówno operatory abstrakcyjne, vide **P2, P9**, jak i konkretne, vide **P3, P5, P7, S2**. Omówimy teraz pokrótce wyniki każdego z tych artykułów.

Opis P2. Rozważamy układ mocno komutujących operatorów $L = (L_1, \ldots, L_d)$ na $L^2 := L^2(X, \nu)$, gdzie (X, ν) jest przestrzenią miarową. Zakładamy, że każdy z L_j, $j = 1, \ldots,$ jest nieujemnym operatorem na L^2, oraz, że 0 nie jest jego wartością własną (to założenie ma jedynie na celu uproszczenie prezentacji). Dla ograniczonej funkcji $m\colon (0,\infty)^d \to \mathbb{C}$ możemy zdefiniować za pomocą wielowymiarowego twierdzenie spektralnego (4.6) operator $m(L)$ (z (4.7) wynika, że $m(L)$ jest ograniczony na L^2). Głównym celem **P2** było udowodnienie (wielowymiarowych) twierdzeń mnożnikowych na $L^p(X, \nu)$ w przypadku gdy niektóre z rozważanych operatorów mają rachunki funkcyjne Mihlina-Hörmandera, zaś inne mają jedynie H^∞ rachunki funkcyjne.

Badanie wielowymiarowych (lub łącznych) mnożników spektralnych dla układów komutujących operatorów było rozwijane w ostatnim czasie przez grupę matematyków. Zainteresowanych zachęcamy do zapoznania się z pracami Albrechta [1], Albrechta, Franksa, i McIntosha [2], Lanciena, Lanciena, Le Merdy'ego [75], Müllera, Ricci'ego, i Steina [96, 97], Frasera [48, 49, 50], Martiniego [78, 79, 80], i Sikory [103].

W **P2** założyliśmy, że pierwszych n operatorów w układzie $L_1, \ldots, L_n$, $0 \leqslant n \leqslant d$ posiada H^∞ rachunki funkcyjne na $L^p = L^p(X, \nu)$. Dokładniej, wymagaliśmy, aby L_j miał H^∞ rachunki funkcyjne na L^p w $S_{\varphi_p^j}$, $j = 1, \ldots, l$.; przypominamy, że $S_{\varphi_p^j}$ oznacza sektor w prawej półpłaszczyźnie zespolonej zdefiniowany w (4.10). O ostatnich l operatorach w układzie L, tzn. $L_{n+1}, \ldots, L_d$, z $n + l = d$, zakładaliśmy dodatkowo posiadanie przez nich rachunków funkcyjnych Mihlina-Hörmandera na L^p.

Pod powyższymi założeniami udowodniliśmy w **P2** twierdzenie mnożnikowe dla $L = (L_1, \ldots, L_d)$ mieszanego rodzaju, vide [Theorem 3.1, **P2**]. W twierdzeniu tym norma $m(L)$ na L^p jest kontrolowana przez mieszaną normę typu Marcinkiewicza

$$\|m(e^{i\pm\phi_p^1}\lambda_1, \ldots, e^{i\pm\phi_p^n}\lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_d)\|_{Mar,\rho} \tag{5.12}$$

wystarczająco wysokiego rzędu $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_d) \in \mathbb{N}_0^d$. Tutaj dla funkcji $\tilde{m}\colon (0,\infty)^d \to \mathbb{C}$ i multiindeksu ρ kładziemy

$$\|\tilde{m}\|_{Mar,\rho} = \sup_{\gamma_1 \leqslant \rho_1} \cdots \sup_{\gamma_d \leqslant \rho_d} \|\tilde{m}\|_{(\gamma)},$$

gdzie

$$\|\tilde{m}\|_{(\gamma)} := \sup_{R_1,\ldots,R_d>0} \int_{R_1<\lambda_1<2R_1} \cdots \int_{R_d<\lambda_d<2R_d} |\lambda^\gamma \partial^\gamma \tilde{m}(\lambda)|^2 \, \frac{d\lambda}{\lambda} < \infty, \tag{5.13}$$

z $\lambda^\gamma = \lambda_1^{\gamma_1} \cdots \lambda_d^{\gamma_d}$.

Jako wniosek z [Theorem 3.1, **P2**] w [Corollary 3.3, **P2**] pokazaliśmy, że pełny układ $L = (L_1, \ldots, L_d)$ ma łączne rachunki funkcyjne Marcinkiewicza wtedy i tylko wtedy gdy każdy z operatorów L_j ma pojedyncze rachunki funkcyjne Marcinkiewicza. Mówimy, że $L = (L_1, \ldots, L_d)$ ma *łączne rachunki funkcyjne Marcinkiewicza*[4] rzędu $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_d)$ gdy zachodzi następujący warunek: jeśli funkcja mnożnikowa m spełnia d wymiarowy warunek Marcinkiewcza (5.13) rzędu ρ, to wówczas operator $m(L)$ jest ograniczony na $L^p(X, \nu)$, $1 < p < \infty$, i zachodzi $\|m(L)\|_{L^p(X,\nu)\to L^p(X,\nu)} \leqslant C_p\|m\|_{Mar,\rho}$. W tej sytuacji bierzemy wszystkie ϕ_p^j, $j = 1, \ldots, n$, równe 0 w (5.12).

Wniosek 5.14 (Corollary 3.3, **P2**). *Zachodzą następujące stwierdzenia*

[4] W przypadku pojedynczego operatora, tzn. gdy $d = 1$, bardziej odpowiednim terminem wydają się 'rachunki funkcyjne Hörmandera', cf. [88, Theorem 2]. Zdecydowaliśmy się pozostać przy terminilogii 'rachunki funkcyjne Marcinkiewicza' w celu zachowania spójności z warunkiem wielowymiarowym.

(i) *Jeśli dla każdego $j = 1, \dots, d$, operator L_j ma rachunki funkcyjne Marcinkiewicza rzędu ρ_j, to wówczas układ $L = (L_1, \dots, L_d)$ ma łączne rachunki funkcyjne Marcinkiewicza każdego rzędu większego niż $\rho + \mathbf{1}$.*
(ii) *Jeśli układ $L = (L_1, \dots, L_d)$ ma łączne rachunki funkcyjne Marcinkiewicza rzedu ρ, to wówczas dla każdego $j = 1, \dots, d$, operator L_j ma rachunki funkcyjne Marcinkiewicza rzędu ρ_j.*

W ostatniej Sekcji 6 pracy **P2** badaliśmy szczególne oszacowanie typu $(1, 1)$. Tutaj nakładaliśmy o wiele bardziej restrykcyjne warunki, zarówno na układ operatorów (rozważaliśmy parę $(L \otimes I, I \otimes A)$, gdzie L jest operatorem Ornsteina-Uhlenbecka zaś A jest operatorem działającym na przestrzeni z miarą dublującą, którego półgrupa ciepła ma oszacowania gaussowskie), jak i na funkcję mnożnikową m (zakładaliśmy, że m jest typu transformaty Laplace'a). Pod tymi warunkami pokazaliśmy w [Theorem 4.1, **P2**] że operatory $m(L \otimes I, I \otimes A)$ są ograniczone z $L^1(H^1)$ do $L^{1,\infty}$; symbol H^1 oznacza tu przestrzeń Hardy'ego na przestrzeni na której działa A, zaś $L^{1,\infty}$ oznacza przestrzeń Lorentza.

Opis P9. Wyniki tego artykułu zostały później znacznie uogólnione w **P2**, omówimy je więc pokrótce. W **P9** rozważaliśmy konkretny podprzypadek **P2**, kiedy każdy z operatorów L_j, $j = 1, \dots, d$, działa na rozdzielonych zmiennych. Takie operatory mocno komutują. Zakładaliśmy również w **P9**, że każdy z operatorów L_j ma bazę ortonormalną złożoną z jego funkcji własnych. Przy tych założeniach otrzymaliśmy wielowymiarowe twierdzenie mnożnikowe na L^p dla $m(L_1, \dots, L_d)$, vide [Theorem 4.1, **P9**]. Dodatkowo w Appendix zbadaliśmy konkretny przypadek, gdy każdy z L_j jest operatorem Bessela. Tutaj udowodniliśmy twierdzenie mnożnikowe typu Marcinkiewicza z ostrym progiem gładkości wyrażonym w języku norm Sobolewa. Wyniki te uzupełniają też **P5**.

Opis P3. W tej pracy rozważaliśmy układ operatorów Dunkla związany z grupą odbić $G = \mathbb{Z}_2^d$. Dla $n = 1, \dots, d$ operatory Dunkla określamy przez

$$T_n f(x) = T_n^{\alpha_n} f(x) = \partial_{x_n} f(x) + \alpha_n \frac{f(x) - f(\sigma_n x)}{x_n}, \qquad f \in C^1(\mathbb{R}^d), \quad n = 1, \dots, d.$$

Symbol $\sigma_n x$ oznacza tutaj odbicie x względem płaszczyzny prostopadłej do e_n (n-tego wektora współrzędnych w $\mathbb{R}^d$), zaś parametr $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ należy do $[0, \infty)^d$. Operatory T_n są symetryczne na $L^2 = L^2(\mathbb{R}^d, \nu_\alpha(x)dx)$, z miarą $\nu_\alpha = \nu_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \nu_{\alpha_d}$ zadaną przez $d\nu_{\alpha_n}(x_n) = |x_n|^{2\alpha_n}\, dx_n$. Co więcej, operatory te mocno komutują; pozwala nam to rozważać $m(T_1, \dots, T_d)$. W kontekście Dunklowskim mamy także do dyspozycji analogon transformaty Fouriera i operatory $m(T_1, \dots, T_d)$ mogą być zdefiniowane jako mnożniki Fouriera-Dunkla.

W [Theorem 4.1, **P3**] udowodniliśmy twierdzenie mnożnikowe typu Marcinkiewicza dla $m(T_1, \dots, T_d)$ z ostrym progiem gładkości wyrażonej w języku przestrzeni Sobolewa mieszanego rodzaju. Nasze wyniki tutaj są uogólnieniem [7, Theorem 3.1]. Pewne twierdzenia mnożnikowe dla (ogólnych) operatorów Dunkla zostały otrzymane w [34, Theorem 3.1]. Autorzy rozważali tam jednak radialne funkcje mnożnikowe m, podczas gdy w naszym przypadku m nie musi być radialna.

W dowodzie [Theorem 4.1, **P3**] istotnie korzystaliśmy z istnienia przesunięcia związanego z operatorami Dunkla oraz faktu, że w kontekście $G = \mathbb{Z}_2^d$ przesunięcie to jest operatorem ograniczonym na wszystkich $L^p(X, \nu)$. Niedawno Dziubański i Hejna [43] otrzymali twierdzenie mnożnikowe typu Hörmandera dla ogólnych operatorów Dunkla, tzn. gdy G jest dowolną grupą odbić niekoniecznie równą $\mathbb{Z}_2^d$. Ich wyniki wymaga jednak dwa razy wyższego progu gładkości niż nasz. Jest to ściśle związane z brakiem oszacowań na L^p dla przesunięcia Dunklowskiego w ogólnym kontekście.

W pracy **P3** badaliśmy także łączne mnożniki spektralne dla układu oscylatorów harmonicznych Dunkla, $L_n = -T_n^2 + |x_n|^2$, $n = 1, \dots, d$. Udowodniliśmy tutaj oszacowania na L^p dla $m(L_1, \dots, L_d)$ przy założeniu warunków Marcinkiewicza podobnych do (5.13) na funkcje mnożnikową m, vide [Theorem 4.1, **P3**]. Twierdzenie to zostało wywnioskowane z oszacowań na L^p norm urojonych potęg L_n przy użyciu ogólnego twierdzenia mnożnikowego z **P9**.

Opis P5. Jest to praca wspólna z J. Dziubańskim i M. Preisnerem. Rozważaliśmy tutaj układ operatorów Bessela

$$L_k = -\frac{\partial^2}{\partial {\lambda_k}^2} - \frac{2\alpha_k}{\lambda_k}\frac{\partial}{\partial \lambda_k}.$$

gdzie $\alpha_k \in (-1/2, \infty)$. Operatory L_k są nieujemne i samosprzężone na $L^2((0, \infty), x_k^{2\alpha_k})$. Ponieważ L_k, $k = 1, \dots, d$, działają na zmiennych rozdzielonych to mocno komutują. Zatem wielowymiarowe twierdzenie spektralne pozwala nam rozważać łączne mnożniki spektralne $m(L_1, \dots, L_d)$ na $L^2 = L^2(X, \nu)$, gdzie $X = (0, \infty)^d$ i $\nu = \nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_d$. W tym kontekście mamy do dyspozycji analogon transformaty

Fouriera zwany transformatą Hankela, która pozwala zapisać $m(L_1, \ldots, L_d)$ jako mnożniki dla transformaty Hankela. Głównymi wynikami **P5** były twierdzenia mnożnikowe typu Hörmandera. W [Theorem 1.8, **P5**] otrzymaliśmy słaby typ $(1,1)$ [5] operatora $m(L_1, \ldots, L_d)$ przy założeniu, że m spełnia warunek typu Hörmandera. Warunek ten był zapisany w języku przestrzeni Sobolewa podobnie do (4.13). Theorem 1.8 w **P5** uogólnia wcześniejsze wyniki Gosselina i Stempaka [52]. Dodatkowo, w [Theorem 1.13, **P5**] otrzymaliśmy podobne twierdzenie mnożnikowe na przestrzeni Hardy'ego $H^1(X)$. Symbol $H^1(X)$ oznacza tutaj atomową przestrzeń Hardy'ego na przestrzeni X.

Ważnym składnikiem dowodów w **P5** było istnienie operatora przesunięcia związanego z transformatą Hankela oraz ograniczoność tego przesunięcia na $L^p(X, \nu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Wykorzystaliśmy także porównanie norm Sobolewa dla transformaty Fouriera z normami Sobolewa dla transformaty Hankela, vide Lemma 2.1 i 2.2 w **P5**. W dowodzie [Theorem 1.13, **P5**] opieraliśmy się na twierdzeniu Uchiyamy [116, Corollary 1']. W tym celu potrzebowaliśmy punktowych oszacowań gaussowskich oraz oszacowań lipschitzowskich dla jądra $T_t(x,y)$ półgrupy e^{-tL}, gdzie $L = \sum_{k=1}^d L_k$. Oszacowania te zostały wywnioskowane z jawnego wzoru na $T_t(x,y)$, który podajemy poniżej

$$T_t(x,y) = ct^{-d} \exp(-(|x|^2 + |y|^2)/4t) \prod_{i=1}^d (x_i y_i)^{-(2\alpha_i - 1)/2} I_{(2\alpha_i-1)/2}(x_i y_i/2t).$$

Symbol $I_{(2\alpha_i-1)/2}$ oznacza tutaj zmodyfikowaną funkcję Bessela rzędu $(2\alpha_i - 1)/2$.

Opis P7. W pracy tej rozważaliśmy łączne mnożniki spektralne, głównie związane z jednowymiarowymi operatorami Ornsteina-Uhlenbecka $\mathcal{L}_n = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_n{}^2} + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$, $n = 1, \ldots, d$. Ogólniej, moglibyśmy rozważać każdy z $\mathcal{L}_n$, $n = 1, \ldots, d$ jako operator k_n wymiarowy; w tym opisie jednak nie będziemy tego robić dla uproszczenia notacji.

W **P7** zbadane były dwa zagadnienia. Pierwsze z nich dotyczyło holomorficzność łącznych mnożników spektralnych układu $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_d)$. Udowodniliśmy najpierw dość ogólne twierdzenie dla układu $L = (L_1, \ldots, L_d)$ nieujemnych operatorów o dyskretnych spektrach, vide [Theorem 3.1, **P7**]. Mianowicie, jeśli dla L_n i każdego $n = 1, \ldots, d$, ich jednostajnie ograniczone mnożniki na L^p, $p > 1$, mają własność holomorficznego rozszerzenia (dla funkcji m), to wówczas to samo jest prawdą na L^p, $p > 1$, dla łącznych mnożników spektralnych układu L. Jako podstawowe zastosowanie pokazaliśmy istnienie holomorficznego rozszerzenia funkcji m dla jednostajnie ograniczonych na L^p, $p \in [1, \infty) \setminus \{2\}$, łącznych mnożników spektralnych układu $\mathcal{L}$, vide [Theorem 3.8, **P7**]. Twierdzenie to jest wielowymiarowym uogólnieniem pracy Hebisch, Mauceri, i Meda [62].

Drugim z badanych zagadnień było otrzymanie łącznego twierdzenie mnożnikowe dla $\mathcal{L}$, vide [Theorem 4.2, **P7**]. Twierdzenie to jest wielowymiarowym analogonem wyników Mauceri, Meda i Sjörgren [86], a dodatkowo pokazuje jak zastosować metody z **P9** do układów operatorów które mają 0 w punktowym spektrum.

Opis S2. Wyniki tego artykułu zostały otrzymane wspólnie z F. Riccim. W **S2** udowodniliśmy twierdzenia mnożnikowe na L^p dla mnożników K-niezmienniczego podlaplasjanu L działającego na podprzestrzeni L^p złożonej z funkcji o ustalonym K typie na grupie $SL(2, \mathbb{R})$.

W algebrze Liego $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ grupy $G = SL(2, \mathbb{R})$ połóżmy

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}. \tag{5.15}$$

Wówczas X i $\{Y_1, Y_2\}$ generują składniki $\mathfrak{k}$ i $\mathfrak{p}$, odpowiednio, w rozkładzie Cartana $\mathfrak{g}$. Dwa lewostronnie niezmiennicze operatory X i $L = -Y_1^2 - Y_2^2$ (mocno) komutują i generują pełną algebrę lewostronnie i $\mathrm{Ad}(K)$-niezmienniczych operatorów różniczkowych na G.

Z operatorem $-iX$ związany jest rozkład spektralny $L^p(G)$ na K-typy dany przez $L^p(G) = \sum_{n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} V_n^p$, gdzie $V_n^p = \{f \in L^p(G) : f(g \exp(\theta X)) = e^{in\theta} f(g)\}$. Z powyższego otrzymujemy podobny rozkład mnożników podlaplasjanu: $m(L) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} T_n \mathcal{P}_n$, gdzie m jest funkcją Borelowską na $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}_n$ jest rzutem ortogonalnym $L^2(G)$ na V_n^2, zaś $T_n : V_n^2 \longrightarrow V_n^2$ jest zadany przez

$$T_n = m(L_{|_{V_n^2}}) . \tag{5.16}$$

W artykule **S2** badaliśmy ograniczoność na L^p operatorów T_n zdefiniowanych w (5.16).

[5] Mówimy, że operator T na $L^1 = L^1(X, \Sigma, \nu)$ jest słabego typu $(1,1)$ jeśli istnieje $C > 0$ taka, że $\nu(\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda\}) \leqslant C\lambda^{-1}\|f\|_{L^1}$ dla $f \in L^1$ i $\lambda > 0$.

W przypadku $n = 0$ operatory postaci T_0 były szeroko badane wcześniej ze względu na identyfikację $V_0^p \simeq L^p(G/K)$, która pozwala utożsamiać $L_{|_{V_0^2}}$ z operatorem Laplace'a-Beltrami'ego na płaszczyźnie hiperbolicznej, vide Stanton i Tomas [109], Anker [8], Ionescu [68], oraz Meda i Vallarino [89]. W pracach tych autorzy podali, w szerszym kontekście przestrzeni symetrycznych, warunki na funkcję mnożnikową m, które implikują ograniczoność na L^p operatorów T_0 przy ustalonym $p \in (1\,\infty)$. Warunki te są typu Mihlina-Hörmandera na brzegu pewnego zbioru parabolicznego Δ_n (vide [(eq. 3.12), **S2**]), we wnętrzu którego funkcja m jest holomorficzna i ograniczona.

Nasz główny wynik [Theorem 5.3, **S2]** jest podobnym twierdzeniem mnożnikowym dla $n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Z ogólnych twierdzeń [Theorem 3.1, **P2**] można wydedukować łączne twierdzenie mnożnikowe na $L^p(G)$ dla pary $(-iX, L)$. Wynika to z faktu, że $-iX$ ma rachunki funkcyjne Mihlina-Hörmandera zaś L ma holomorficzne rachunki funkcyjne. Wynik ten jednak nie jest w pełni satysfakcjonujący, ponieważ nie uwzględnia interakcji między L i $-iX$, które mimo że komutują, to nie działają na zmiennych rozdzielonych. W szczególności możemy stosować [Theorem 3.1, **P2**] tylko do funkcji mnożnikowych m określonych na produkcie spektrów L i $-iX$. Pożądane natomiast byłoby twierdzenie mnożnikowe które dopuszcza funkcje m określone na łącznym spektrum $(L, -iX)$ (który to zbiór jest ściśle zawarty w produkcie spektrów).

Kluczowym składnikiem dowodu [Theorem 5.3, **S2]** są globalne i lokalne rozwinięcia funkcji sferycznych $\zeta_{n,s}$. Funkcja sferyczna $\zeta_{n,s}$ jest to łączna funkcja własna dla pary $(L, -iX)$ odpowiadająca wartości własnej $(n, s(1-s))$. Rozwinięcia ta są zawarte w [Section 4, **S2**]. Potrzebowaliśmy także reguły majoryzacyjnej Herza oraz twierdzenia transferencyjnego typu Coifmana-Weissa.

5.3. **Niezależne od wymiaru oszacowania dla pojedynczych transformat Riesza.** Artykuły **P4, P8**.

W pracach tych badaliśmy niezależne od wymiaru oszacowania dla pojedynczych transformacji Riesz. Zwracamy uwagę, że w przeciwieństwie do **H4**, wyniki **P4, P8** nie implikują niezależny od wymiaru oszacowań dla wektora transformat Riesza. Co więcej, w **P4, P8** stałe w dowodzonych oszacowaniach zależą od p w sposób niejawny.

Opis P8. Jest to praca wspólna z K. Stempakiem. Badaliśmy w niej szczególny przypadek transformat Riesza związanych z rozwinięciami w funkcje Laguerre'a typu Hermite'a. Dla parametru typu $\alpha \in (-1, \infty)^d$ operator Laguerre'a jest zdefiniowany przez

$$L_\alpha = -\Delta + |x|^2 + \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{x_i^2}\left(\alpha_i^2 - \frac{1}{4}\right). \tag{5.17}$$

Pochodną cząstkową Laguerre'a δ_j nazywamy operator

$$\delta_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + x_j - \frac{1}{x_j}(\alpha_j + 1/2). \tag{5.18}$$

Zauważmy, że L_α jest symetryczny względem miary Lebesgue'a na $(0, \infty)^d$. Zarówno L_α jak i δ_j rozważamy początkowo na $C_c^\infty((0, \infty)^d)$.

Formalnie rzecz biorąc transformaty Riesza rozważane w **P8** są zadane przez $\delta_j(L_\alpha)^{-1/2}$. Stosując metody funkcji kwadratowej (wykorzystane wcześniej w [58] i [112]) pokazaliśmy w **P8**, że dla każdego $j = 1, \dots, d$, transformata Riesza-Laguerre'a $\delta_j(L_\alpha)^{-1/2}$, ma oszacowania niezależne od wymiaru na $L^p((0, \infty)^d, dx)$, $1 < p < \infty$, dla pewnego zakresu parametrów α, vide [Theorem 5.1, **P8**]. Wyniki **P8** były następnie znaczenie uogólnione w **P4** i dlatego w tej sekcji skupimy się jedynie na opisie **P4**. Definicja funkcji Laguerre'a typu Hermite'a zostanie podana w Sekcji 5.4.

Opis P4. Głównym celem **P4** było zastosowanie H^∞ łącznych rachunków funkcyjnych (dla pary mocno komutujących operatorów) do otrzymania (niezależnych od wymiaru) oszacowan norm L^p wielowymiarowych pojedynczych transformat Riesza. W pracy tej rozważaliśmy uogólnione transformaty Riesza jak w (4.44), tj.

$$R_j = \delta_j L^{-1/2}, \qquad j = 1, \dots, d.$$

Powyżej δ_j jest pewnym operatorem działającym na gęstej podprzestrzeniw $L^2(X_j, \mu_j)$, natomiast $L = \sum_{j=1}^d L_j$ gdzie L_j jest nieujemnym operatorem na $L^2(X_j, \mu_j)$ generującym symetryczną półgrupę kontrakcji. Podobnie do **H4**, gdy 0 nie jest wartością własną L, to definicja R_j musi być nieco poprawiona; nie będziemy się jednak zajmować takimi przypadkami w autoreferacie. Podkreślamy, że w przeciwieństwie do **H4** nie zakładamy tutaj żadnej bezpośredniej relacji między δ_j i L_j w rodzaju (4.45) lub (4.46), nie zakładamy też niczego o przestrzeniach X_j.

Poniżej podajemy uproszczoną wersję głównego wyniku **P4**. Połóżmy $L^p = L^p(X,\mu)$, z $X = X_1 \times \cdots \times X_d$ i $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_d$.

Twierdzenie 5.19 (Corollary 3.3, **P4**). *Ustalmy $j = 1, \ldots, d$ i załóżmy, że jednowymiarowa transformata Riesza $\delta_j L_j^{-1/2}$ jest ograniczona na $L^p(X_j, \mu_j)$. Wówczas wielowymiarowa transformata Riesza R_j jest ograniczona na L^p. Zachodzi także oszacowanie*

$$\|R_j\|_{L^p \to L^p} \leqslant C_p \|\delta_j L_j^{-1/2}\|_{L^p(X_j,\nu_j) \to L^p(X_j,\nu_j)}, \tag{5.20}$$

ze stałą C_p niezależną od ('wymiaru') d.

Twierdzenie 5.19 pozwala (w dużej ogólności) wydedukować niezależne od wymiaru oszacowania dla operatora R_j z oszacowań dla jego jednowymiarowego odpowiednika $\delta_j L_j^{-1/2}$. W szczególności, możemy w ten sposób zbadać wiele transformat Riesza dla rozwinięć ortogonalnych; w [Section 4, **P4**] podajemy listę przykładów. Dodatkowo, metoda pozwala nam wywnioskować niezależne od wymiaru oszacowania dla transformat Riesza na produktach grup dyskretnych o wzroście wielomianowym, vide [Section 5, **P4**], co jest rozszerzeniem niektórych wyników Lust-Piquard [76].

Twierdzenie 5.19 ma jednak pewne ułomności, zwłaszcza gdy porównać je z pracą **H4**. Przede wszystkim, jak już wspomnieliśmy, **P4** nie implikuje niezależnych od wymiaru oszacowań dla wektora transformat Riesz $(R_1, \ldots, R_d)$. Co więcej, stała C_p w (5.20) jest niejawna (i z pewnością jest gorsza niż $(p-1)^{-2}$, gdy $p \to 1^+$).

Twierdzenie 5.19 jest wnioskiem z pewnego wyniku dotyczącego H^∞ łącznych rachunków funkcyjnych dla układu $L = (L_1, \ldots, L_d)$. Argument użyty w dowodzie Twierdzenia 5.21 oparty jest na obserwacji, że L_j i $L^{(j)} = \sum_{i \neq j} L_i$ są mocno komutującymi operatorami, z których każdy ma H^∞ rachunki funkcyjne w sektorze $S_{|1/p-1/2|}$.

Twierdzenie 5.21 (Theorem 3.1, **P4**). *Dla każdego $j = 1, \ldots, d$, zachodzi*

$$\max_{j=1,\ldots,d} \|L_j^{1/2}(L_1 + \cdots + L_d)^{-1/2}\|_{L^p \to L^p} \leqslant C_p, \tag{5.22}$$

ze stałą C_p niezależną od ('wymiaru') d.

5.4. **Analiza harmoniczna związana z rozwinięciami w funkcje Laguerre'a typu Hermite'a.** Artykuły **P6, P10, P11**.

W pracach tych badaliśmy pewne podstawowe obiekty analizy harmonicznej związane z rozwinięciami w funkcje Laguerra typu Hermite'a $\varphi_k^\alpha(x) = \varphi_{k_1}^{\alpha_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_{k_d}^{\alpha_d}(x_d)$. Tutaj $\{\varphi_k^\alpha\}_{k \in \mathbb{N}^d}$ jest d wymiarowym układem funkcji Laguerre'a typu Hermite'a (jak w [115, 6.4.12]), z $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}^d$ i $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in (-1, \infty)^d$. Każda funkcja φ_k^α jest funkcją własną operatora L_α zadanego przez (5.17), odpowiadającą wartości własnej $\lambda_{|k|}^\alpha = 4|k| + 2|\alpha| + 2d$; piszemy tu $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$ i $|k| = k_1 + \ldots + k_d$ dla oznaczenia długości k. Wiadomo także, że, $\{\varphi_k^\alpha : k \in \mathbb{N}^d\}$ jest bazą ortonormalną w $L^2 = L^2((0,\infty)^d, dx)$. Zauważmy, że zarówno funkcje własne φ_k jak i operator L_α są dane jawnym wzorem. Z tego powodu możemy w kontekście rozwinięć w funkcje Laguerr'a typu Hermite'a udowodnić pewne wyniki niedostępne z punktu widzenia ogólnej teorii. Dokładniej, pokazaliśmy, że operatory badane w pracach **P6, P10, P11** są operatorami Calderóna-Zygmunda (o wartościach skalarnych lub wektorowych). Zatem ogólna teoria implikuje oszacowania norm tych operatorów, w szczególności wiemy, że są one ograniczone na $L^p(w)$, $1 < p < \infty$, dla w z klasy Muckenhoupta A_p.

Dowody wyników opisywanych w tej sekcji są w dużej mierze oparte na zastosowaniu odpowiednich asymptotyk dla funkcji Bessela. Użyteczność tych asymptotyk w badaniu rozwinięć w funkcje Laguerr'a typu Hermite'a jest już widoczna dla jądra ciepła $\mathcal{G}_t^\alpha(x,y)$ półgrupy e^{-tL_α}. Zachodzi mianowicie następujący wzór typu Mellera

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_t^\alpha(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t\lambda_n^\alpha} \sum_{|k|=n} \varphi_k^\alpha(x)\varphi_k^\alpha(y) \\ &= (\sinh 2t)^{-d} \exp\left(-\frac{1}{2} \operatorname{ctgh} 2t \left(|x|^2 + |y|^2\right)\right) \prod_{i=1}^{d} \sqrt{x_i y_i} I_{\alpha_i}\left(\frac{x_i y_i}{\sinh 2t}\right),\end{aligned}$$

powyżej I_{α_i} oznacza zmodyfikowaną funkcję Bessela pierwszego rodzaju i rzędu α_i.

Opis P6. W pracy tej rozważaliśmy mnożniki typu Laplace'a $m(L_\alpha)$ z funkcją mnożnikową m postaci (4.9) lub podobnej. Pokazaliśmy, że operatory te są operatorami Calderóna-Zygmunda, vide Theorem 2.5 i Proposition 2.6 w **P6**, a zatem spełniają oszacowania słabego typu $(1,1)$. Wyniki tej pracy uogólniają **P11**.

Opis P10. Badaliśmy tutaj słaby typ $(1,1)$ i oszacowania na L^p różnych funkcji kwadratowych związanych z rozwinieciami Laguerre'a typu Hermite'a. W **P10** rozważaliśmy funkcję kwadratową dla półgrupy ciepła Laguerre'a

$$g_H(f)(x) = \left(\int_0^\infty \left|\frac{d}{dt}e^{-tL_\alpha}f\right|^2 t\,dt\right)^{1/2}, \tag{5.23}$$

funkcje kwadratowe dla Laguerre'owskich pochodnych cząstkowych w kontekście półgrupy ciepła Laguerre'a

$$g_H^j(f)(x) = \left(\int_0^\infty \left|\delta_j e^{-tL_\alpha}f\right|^2 dt\right)^{1/2}, \quad j = 1, \dots, d, \tag{5.24}$$

a także ich odpowiedniki dla półgrupy Poissona $e^{-tL_\alpha^{1/2}}$. Przypominamy, że pochodna cząstkowa Laguerre'a δ_j jest zdefiniowana w (5.18). W Theorem 2.1 i Corollary 2.5 pracy **P10** pokazaliśmy, że (5.23), (5.24) i ich warianty dla $e^{-tL_\alpha^{1/2}}$, są wektorowo-wartościowymi operatorami Calderóna-Zygmunda. Implikuje to ich ograniczoność na odpowiednich przestrzeniach L^p oraz oszacowania słabego typu $(1,1)$.

Opis P11. W tej pracy badaliśmy słaby typ $(1,1)$ urojonych potęg L_α^{iu}. Wyniki tej pracy zostały następnie uogólnione w **P6**.

LITERATURA

[1] D. Albrecht, *Functional calculi of commuting unbounded operators*, PhD thesis, Monash University, Australia (1994).
[2] D. Albrecht, E. Franks, and A. McIntosh, *Holomorphic functional calculi and sums of commuting operators*, Bull. Aust. Math. Soc. 58 (1998), 291–305.
[3] J.M. Aldaz, *The weak type (1, 1) bounds for the maximal function associated to cubes grow to infinity with the dimension*, Ann. Math. (2) 173 (2011), 1013–1023.
[4] G. Alexopoulos. *Spectral multipliers on Lie groups of polynomial growth.* Proc. Amer. Math. Soc., 120(3):973–979, 1994.
[5] G. Alexopoulos, *Spectral multipliers for Markov chains*, J. Math. Soc. Japan (3) 56 (2004), 833–852.
[6] G. Alexopoulos, N. Lohoué, *Riesz means on Lie groups and Riemannian manifolds of nonnegative curvature*, Bull. Soc. Math. France, 122 (1994), 209–223.
[7] B. Amri, A. Gasmi, M. Sifi, *Linear and Bilinear Multiplier Operators for the Dunkl Transform*, Mediterr. J.Math. (4) 7 (2010), 503–521.
[8] J.-Ph. Anker, *L_p Fourier multipliers on Riemannian symmetric spaces of the non-compact type*, Ann. of Math. 132 (1990), 597–628.
[9] Bañuelos, R., *Martingale transforms and related singular integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. 293 (1986), 547–563.
[10] Bañuelos, R., Wang, G., *Sharp inequalities for martingales with applications to the Beurling-Ahlfors and Riesz transforms*, Duke Math. J. 80 (1995), 575–600.
[11] O. Blasco, *Bilinear multipliers and transference*, Int. J. Math. Math. Sci. (4) 2005, 545-554.
[12] M. Bonnefont, *The Subelliptic Heat Kernels on $SL(2,\mathbb{R})$ and on its Universal Covering $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$: Integral Representations and Some Functional Inequalities*, Potential Anal. (2) 36 (2012), 275–300.
[13] J. Bourgain, *On high dimensional maximal functions associated to convex bodies*, Amer. J. Math. 108 (1986), 1467–1476.
[14] J. Bourgain, *On L^p bounds for maximal functions associated to convex bodies in $\mathbb{R}^n$*, Israel J. Math. Math. 54 (1986), 257–265.
[15] J. Bourgain, *On the Hardy-Littlewood maximal function for the cube*, Israel J. Math. 203 (2014), 275–293.
[16] J. Bourgain, D. Li, *On an endpoint Kato-Ponce inequality*, Diff. Int. Eq. (11/12) 27 (2014), 1037-1072.
[17] F. Bernicot, D. Maldonado, K. Moen, and V. Naibo, *Bilinear Sobolev-Poincaré inequalities and Leibniz-type rules*, J. Geom. Anal. (2) 24 (2014), 1144-1180.
[18] A. Carbery, *An almost-orthogonality principle with applications to maximal functions associated to convex bodies*, Bull. Amer. Math. Soc. (2) 14 (1986), 269–274.
[19] L. Delaval, O. Guédon, B. Maurey, *Dimension-free bounds for the Hardy-Littlewood maximal operator associated to convex sets*, preprint (2016) https://arxiv.org/abs/1602.02015
[20] A. Carbonaro, O. Dragičević, *Bellman function and dimension-free estimates in a theorem of Bakry*, J. Funct. Anal. 265 (2013), 1085–1104.
[21] A. Carbonaro, O. Dragičević, *Functional calculus for generators of symmetric contraction semigroups*, Duke Math. J. (5) 166 (2017), 937-974.
[22] M. Christ. *L^p bounds for spectral multipliers on nilpotent groups*, Trans. Amer. Math. Soc. , 328(1):73–81, 1991

[23] M. Christ, C. D. Sogge, *The weak type L^1 convergence of eigenfunction expansions for pseudodifferential operators*, Invent. Math. (2) 94 (1998), 421–453.
[24] J. L. Clerc, E. Stein, *Lp-multipliers for non-compact Symmetric Spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA (10) 71 (1974), 3911–3912.
[25] R. Coifman, Y. Meyer, *Au-dela des operateurs pseudo-differentiels*, Astérisque 57 (1978).
[26] R. Coifman, Y. Meyer, *Nonlinear harmonic analysis, operator theory, and PDE* in Beijing Lectures in Harmonic Analysis (Beijing, 1984), Annals of Mathematics Studies 112, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1986, 3–45.
[27] R. R. Coifman, R. Rochberg, and G. Weiss, *Applications of transference: The L^p version of von Neumann's inequality and Littlewood-Paley-Stein theory*, Linear Spaces and Approximation, Birkhäuser, Basel, 1978, 53–67.
[28] R. R. Coifman, G. Weiss, *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 569–615.
[29] M. G. Cowling, *Harmonic analysis on semigroups*, Ann. of Math. 117 (1983), 267-283.
[30] M. Cowling, I. Doust, A. McIntosh and A. Yagi, *Banach space operators with a bounded H^∞ functional calculus*, Journal of Aust. Math. Society (Series A) 60 (1996), 51–89.
[31] M. Cowling, S. Meda, A. G. Setti, *An overview of harmonic analysis on the group of isometries of a homogeneous tree*, Exposition. Math. 16 (1998), 385–423.
[32] M. Cowling, S. Meda, A. G. Setti, Invariant operators on function spaces on homogeneous trees, *Colloq. Math.*, 80 (1999), 53–61.
[33] M. Cowling, A. Sikora, *A spectral multiplier theorem for a sub-Laplacian on $SU(2)$*. Math. Z., 238(1):1–36, 2001.
[34] F. Dai, H. Wang, *A transference theorem for the Dunkl Transform and ints Applications*, J. Funct. Anal. (12) 258 (2010), 4052-4074.
[35] O. Dragičević, A. Volberg, *Bellman functions and dimensionless estimates of Littlewood-Paley type*, J. Oper. Theory (1) 56 (2006), 167–198.
[36] O. Dragičević, A. Volberg, *Linear dimension-free estimates for the Hermite-Riesz transforms*, arXiv:0711.2460v2 (2007).
[37] O. Dragičević, A. Volberg, *Linear dimension-free estimates in the embedding theorem for Schrödinger operators*, J. London Math. Soc. (2) 85 (2012), 191–222.
[38] O. Dragičević, A. Volberg, *Bilinear embedding for real elliptic differential operators in divergence form with potentials*, J. Funct. Anal. 261 (2011), 2816–2828.
[39] J. Duoandikoetxea, J. L. Rubio de Francia, *Estimations indépendantes de la dimension pour les transformées de Riesz*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, (7) 300 (1985), 193–196.
[40] X. T. Duong, A. McIntosh, *Singular integral operators with non-smooth kernels on irregular domains*, Rev. Mat. Iberoamericana (2) 15 (1999), 233–265.
[41] X. T. Duong, E. M. Ouhabaz, and A. Sikora, *Plancherel type estimates and sharp spectral multipliers*, J. Funct. Anal. (2) 196 (2002), 443–485.
[42] J. Dziubański, M. Preisner, *Remarks on spectral multiplier theorems on Hardy spaces associared with semigroups of operators*, Revista de la Union Matematica Argentina, (2) 50 (2009), 201-215.
[43] J. Dziubański, A. Hejna, *Hörmander's multiplier theorem for the Dunkl transform*, preprint arXiv:1807.02640, 2018.
[44] K-J. Engel, R. Nagel, One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Graduate Texts in Mathematics, 2000.
[45] A. Figà Talamanca and C. Nebbia, *Harmonic Analysis and Representation Theory for Groups Acting on Homogeneous Trees*, London Math. Society Lecture Notes Series, n. 162, Cambridge University Press, 1991.
[46] G. B. Folland, E. M. Stein. *Hardy spaces on homogeneous groups*, Mathematical Notes, 28. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1982. xii+285.
[47] L. Forzani, E. Sasso, and R. Scotto, *L^p boundedness of Riesz transforms for orthogonal polynomials in a general context*, Studia Math., (1) 231 (2015), 45-71.
[48] A. J. Fraser, *Marcinkiewicz multipliers on the Heisenberg group*, PhD thesis, Princeton University, 1997.
[49] A. J. Fraser, *An (n+1)-fold Marcinkiewicz multiplier theorem on the Heisenberg group*, Bull. Austral. Math. Soc. 63 (2001), 35–58.
[50] A. J. Fraser, *Convolution kernels of (n+1)-fold Marcinkiewicz multipliers on the Heisenberg group*, Bull. Austral. Math. Soc. (3) 64 (2001), 353–376.
[51] D. Frey, *Paraproducts via H^∞-functional calculus*, Rev. Math. Iberoam. (2) 29 (2013), 635-663.
[52] J. Gosselin, K. Stempak, *A Weak-Type Estimate for Fourier-Bessel Multipliers*, Proc. Amer. Math. Soc. 106 (1989), 3, 655–662.
[53] L. Grafakos, R. Torres, *Multilinear Calderón-Zygmund theory*, Adv. Math. 165 (2002), 124-164.
[54] L. Grafakos, S. Oh, *The Kato-Ponce inequality*, Commun. Part. Diff. Eq. (6) 39 (2014), 1128-1157.
[55] H. Gunawan, A. Sikora, *On maximal operators associated to Laplace operators*, Research Report, http://personal.fmipa.itb.ac.id/hgunawan/files/2007/11/wmax8r.pdf , 2002.
[56] C. E. Gutiérrez, *On the Riesz transforms for Gaussian measures*, J. Funct. Anal. 120 (1994), 107–134.
[57] C. E. Gutiérrez, A. Incognito, J.L. Torrea, *Riesz transforms, g-functions and multipliers for the Laguerre semigroup*, Houston J. Math. 27 (2001), 579–592.
[58] E. Harboure, L. de Rosa, C. Segovia and J. L. Torrea, *L^p-dimension free boundedness for Riesz transforms associated to Hermite functions*, Math. Ann. 328 (2004), 653–682.
[59] W. Hebisch, *Multiplier theorem on generalized Heisenberg groups* Colloq. Math., 65(2):231–239, 1993.
[60] W. Hebisch and J. Zienkiewicz *Multiplier theorem on generalized Heisenberg groups II*, Colloq. Math. (1) 69 (1995), 29–36.
[61] W. Hebisch, *A multiplier theorem for Schrödinger operators*, Colloq. Math. (2) 60/61 (1990), 659–664.

[62] W. Hebisch, G. Mauceri, S. Meda, *Holomorphy of spectral multipliers of the Ornstein-Uhlenbeck operator*, J. Funct. Anal. 210 (2004), 101–124.

[63] E. Hewitt and K.A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis* vol. 1, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics n. 115, Springer-Verlag, 1979.

[64] S. Hofmann, G. Lu, D. Mitrea, M. Mitrea, L. Yan, *Hardy spaces associated to non-negative self-adjoint operators satisfying Davies-Gaffney estimates*, Mem. Amer. Math. Soc. 214 (2011), 1007

[65] L. Hörmander, *Estimates for translation invariant operators in L^p spaces*, Acta Math. (1) 104 (1960), 93–140.

[66] A. Hulanicki, *Subalgebra of $L^1(G)$ associated with Laplacian on a Lie group*, Colloq. Math. 31 (1974), 259-–287.

[67] Iwaniec, T. and Martin, G., *Riesz transforms and related singular integrals*, J. Reine Angew. Math. 473 (1996), 25–57.

[68] A.D. Ionescu, Singular integrals on symmetric spaces of real rank one, *Duke Math. J.* 114 (2002), 101–122.

[69] A.D. Ionescu, *Singular integrals on symmetric spaces, II*, Trans. Amer. Math. Soc. 335 (2003), 3359–3378.

[70] R. L. Jones, A. Seeger, J. Wright, *Strong Variational and Jump Inequalities in Harmonic Analysis*, Trans. Amer. Math. Soc. 360, 12, (2008), 6711–6742.

[71] K. Jotsaroop, P. K. Sanjay, S. Thangavelu *Riesz transforms and multipliers for the Grushin operator*, J. Anal. Math. (1) 119 (2013), 255–273.

[72] T. Kato, G. Ponce, *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations*, Commun. Pure Appl. Math., 41 (1988), 891-907.

[73] C. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle*, Comm. Pure Appl. Math., 46 (1993), 527-620.

[74] C. Kenig, E. M. Stein, *Multilinear estimates and fractional integrals*, Math. Res. Lett. 6 (1999), 1–15.

[75] F. Lancien, G. Lancien, and C. Le Merdy, *A joint functional calculus for sectorial operators with commuting resolvents*, Proc. London Math. Soc. (2) 77 (1998), 387–414.

[76] F. Lust-Piquard, *Dimension free estimates for discrete Riesz transforms on products of abelian groups*, Adv. Math. (2) 185 (2004), 289–327.

[77] J. Marcinkiewicz, *Sur les multiplicateurs des séries de Fourier*, Studia Math. (1) 8 (1939), 78–91.

[78] A. Martini, *Algebras of differential operators on Lie groups and spectral multipliers*, PhD thesis, Scuola Normale Superiore, Pisa, Italy (2009), arXiv:1007.1119.

[79] A. Martini, *Spectral theory for commutative algebras of differential operators on Lie groups*, J. Funct. Anal. (9) 260 (2011), 2767–2814.

[80] A. Martini, *Analysis of joint spectral multipliers on Lie groups of polynomial growth*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) (4) 62 (2012), 1215–1263.

[81] A. Martini, *Spectral multipliers on Heisenberg-Reiter and related groups*. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 194 (2015), 1135–1155.

[82] A. Martini, D. Müller, *L^p spectral multipliers on the free group $N_{3,2}$*, Studia Math. (1) 217 (2013), 41–55.

[83] A. Martini, D. Müller, *Spectral multiplier theorems of Euclidean type on new classes of 2-step stratified groups*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) (5) 109 (2014), 1229–1263.

[84] A. Martini, D. Müller, *Spectral multipliers on* 2*-step groups: topological versus homogeneous dimension*, Geom. Funct. Anal. 26 (2016), 680-702.

[85] Mauceri, S. Meda *Vector-valued multipliers on stratified groups*, Rev. Mat. Iberoamericana , 6(3-4):141–154, 1990.

[86] G. Mauceri, S. Meda, P. Sjögren, *Sharp estimates for the Ornstein-Uhlenbeck operator*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 3 (2004), 447-480.

[87] G. Mauceri, M. Spinelli, *Riesz transforms and spectral multipliers of the Hodge-Laguerre Operator*, J. Funct. Anal. 269 (2015), 3402–3457.

[88] S. Meda, *A general multiplier theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. (3) 110 (1990), 639–647.

[89] S. Meda and M. Vallarino, Weak type estimates for spherical multipliers on non-compact symmetric spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 362 (2010), 6, 2993–3026.

[90] P. A. Meyer, *Transformationse de Riesz pour les lois gaussiennes*, Séminaire de Proba. XVIII, Springer Lecture Notes 1059 (1984), 179–293.

[91] S. G. Mihlin, *Multidimensional singular integrals and integral equations*, Translated from the Russian by W. J. A. Whyte. Pergamon Press, Oxford-New York-Paris 1965.

[92] M. Mirek, E. M. Stein, B. Trojan, *$\ell^p(\mathbb{Z}^d)$-estimates for discrete operators of Radon type: Variational estimates*, Invent. Math. 209, 3 (2017), 665–748.

[93] C. Muscalu, J. Pipher, T. Tao, and C. Thiele, *Bi-parameter paraproducts*, Acta Math. 193 (2004), 269-296.

[94] C. Muscalu, W. Schlag, *Classical and multilinear harmonic analysis*, Vol II, Cambridge Studies in advanced mathematics 138, 2013.

[95] D. Müller, *A geometric bound for maximal functions associated to convex bodies*, Pacific J. Math. 142, 2, (1990) 297–312.

[96] D. Müller, F. Ricci, and E. M. Stein, *Marcinkiewicz multipliers and multi-parameter structure on Heisenberg (-type) groups I.*, Invent. Math. (2) 119 (1995), 199–233.

[97] D. Müller, F. Ricci, and E. M. Stein, *Marcinkiewicz multipliers and multi-parameter structure on Heisenberg (-type) groups. II.*, Math. Z. (2) 221 (1996), 267–291.

[98] D. Müller and E. M. Stein, *On spectral multipliers for Heisenberg and related groups*, J. Math. Pures Appl. (9), 73(4):413–440, 1994

[99] F. Nazarov, S. Treil, *The hunt for a Bellman function: applications to estimates for singular integral operators and to other classical problems of harmonic analysis*, (Russian) Algebra i Analiz (5) 8 (1996), 32–162; translation in St. Petersburg Math. J. (5) 8 (1997), 721–824.

[100] C. Nebbia, Groups of isometries of a tree and the Kunze-Stein phenomenon, *Pacific J. Math.* 133 (1988), 141–149.
[101] A. Nowak, *On Riesz transforms for Laguerre expansions*, J. Funct. Anal. 215 (2004), 217–240.
[102] A. Sikora, *Multiplier theorem for sub-Laplacians on homogeneous groups*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. (4) 315 (1992), 417-–419.
[103] A. Sikora, *Multivariate spectral multipliers and analysis of quasielliptic operators on fractals*, Indiana Univ. Math. J., 58 (2009), 317–334.
[104] A. Nowak, P. Sjögren, *Riesz transforms for Jacobi expansions*, J. Anal. Math. 104 (2008), 341–369.
[105] A. Nowak, K. Stempak, *L^2-theory of Riesz transforms for orthogonal expansions*, J. Fourier Anal. Appl. (6) 12 (2006), 675–711.
[106] G. Pisier, *Riesz transforms: A simpler proof of P.A. Meyer's inequality*, Lecture Notes in Math., (1) 1321 (1988), 485–501.
[107] T. Pytlik, Radial convolutors on free groups, *Studia Math.* 78 (1984), 178–183.
[108] K. Schmüdgen, *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*, Grad. Texts in Math. 265 (2012).
[109] R. Stanton, P. Tomas, *Expansions for spherical functions on non-compact symmetric spaces*, Acta Math. (1) 140 (1978), 251–276.
[110] E. M. Stein, *Topics in Harmonic Analysis Related to the Littlewood-Paley Theory*, Annals Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1970.
[111] E. M. Stein, *The development of square functions in the work of A. Zygmund*, Bull. Amer. Math. Soc, 7, (1982), 359–376.
[112] E. M. Stein, *Some results in harmonic analysis in $\mathbb{R}^n$, $n \to \infty$*, Bull. Amer. Math. Soc. 9, (1983), 71–73.
[113] E. M. Stein, J-O .Strömberg, *Behavior of maximal functions in $\mathbb{R}^n$ for large n'*. Ark. Mat. (2) 21 (1983), 259-269.
[114] R. Szwarc, Convolution operators of weak type (p,p), which are not of strong type (p,p), *Proc. Amer. Math. Soc.*, 89, 1. (1983), 184–185.
[115] S. Thangavelu, *Lectures on Hermite and Laguerre expansions*, Math. Notes 42, Princeton Univ. Press, Princeton, 1993.
[116] A. Uchiyama *A Maximal Function Characterization of H^p on the Space of Homogeneous Type*, Trans. Amer. Math. Soc. 262 (1980) 2, 579–592.
[117] A. Veca, The Kunze-Stein phenomenon on the isometry group of a tree, *Bull. Austral. Math. Soc.* 65 (2002), 153–174

B. Wróbel, Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski, Plac Grunwaldzki 2/4, 50–384 Wrocław, Poland
Email address: `blazej.wrobel@math.uni.wroc.pl`

Wróbel Błażej