

INSTYTUT INFORMATYKI
WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI
UNIwersYTET WROCLAWSKI

FILIP CHUDY

**NOWE ALGORYTMY DLA WIELOMIANÓW
BERNSTEINA, ICH BAZ DUALNYCH
I FUNKCJI B-SKLEJANYCH**

Praca doktorska

Promotor: dr hab. Paweł Woźny

Wrocław 2022

Streszczenie

Praca przedstawia nowe algorytmy dla krzywych Béziera, krzywych B-sklejanych i dualnych wielomianów Bernsteina. Zaproponowane metody pozwalają na przyspieszenie obliczeń wykonywanych m.in. w grafice komputerowej i analizie numerycznej.

Nowy algorytm szybkiego wyznaczania wartości krzywej Béziera łączy zalety znanych wcześniej metod rozwiązywania tego problemu: liniową złożoność schematu Hornera oraz interpretację geometryczną, własność otoczki wypukłej i operowanie na kombinacjach wypukłych właściwe algorytmowi de Casteljau. Zaproponowaną metodę można stosować nie tylko do wielomianowych i wymiernych krzywych Béziera, ale też do tzw. *wymiernych obiektów parametrycznych*. Ważnym ich przykładem są wymierne tensorowe i trójkątne powierzchnie Béziera. Zastosowanie zaprezentowanego w pracy podejścia pozwala osiągnąć optymalną złożoność, tj. proporcjonalną do liczby punktów kontrolnych definiujących te obiekty.

Opisano też nowy algorytm wyznaczania współczynników funkcji B-sklejanych w bazie Bernsteina-Béziera, oparty na nowej zależności różniczkowo-rekurencyjnej spełnianej przez te funkcje. Przy pewnych założeniach o węzłach definiujących te funkcje, algorytm jest optymalny. Przedstawiony został również szkic podobnego algorytmu dla reprezentacji funkcji B-sklejanych w bazie potęgowej. Jeżeli znane są współczynniki Bernsteina-Béziera funkcji B-sklejanych, można zastosować nowy algorytm ewaluacji krzywej Béziera, by przyspieszyć procedurę wyznaczenia punktu na krzywej B-sklejanej. Przy obliczaniu w wielu punktach wartości wielu opartych na tych samych węzłach krzywych B-sklejanych uzyskuje się algorytm mający niższą złożoność niż w metodzie wykorzystującej algorytm de Boora-Coxa. Stosując podobne podejście można wyznaczyć każdą funkcję B-sklejaną w czasie liniowym względem jej stopnia.

W pracy podano też wiele nowych związków różniczkowych, różniczkowo-rekurencyjnych i rekurencyjnych spełnianych przez dualne wielomiany Bernsteina tego samego stopnia. Znajomość takich związków rekurencyjnych pozwala, na przykład, na znalezienie wartości wszystkich $n + 1$ dualnych wielomianów Bernsteina tego samego stopnia n w optymalnym czasie $O(n)$. Rekurencji tych można też użyć do ewaluacji dowolnej kombinacji liniowej dualnych wielomianów Bernsteina stopnia n , np. poprzez użycie algorytmu typu Clenshawa. Taką procedurę można wykonać w czasie liniowym względem stopnia wielomianu zapisanego w bazie dualnych wielomianów Bernsteina, czyli równym złożoności obliczeniowej schematu Hornera. W pracy przedstawiono kilka związków rekurencyjnych łączących kolejne dualne wielomiany Bernsteina tego samego stopnia: jednorodny rzędu czwartego, trzeciego i drugiego oraz niejednorodny rzędu pierwszego. Związek niejednorodny rzędu pierwszego został przetestowany pod względem efektywności numerycznej. Przeprowadzone eksperymenty pokazują, że algorytm wykorzystujący ten związek daje dobre wyniki nawet dla tak wysokich stopni dualnych wielomianów Bernsteina jak 3000 czy 5000.

Związki rekurencyjne między dualnymi wielomianami Bernsteina tego samego stopnia można też zastosować do równoległego obniżania stopnia krzywej Béziera z ograniczeniami. Dzięki nim można istotnie ułatwić korzystanie z obliczeń równoległych, choć przy zachowaniu dotychczasowej złożoności, poprzez przekształcenie związku rekurencyjnego wykorzystywanego w podejściu opartym na bazach dualnych.